

Eine kombinierte Verstärkerapparatur zum Nachweis kleinster Ionenmengen, insbesondere einzelner β -Teilchen¹⁾

Von Walter Masing

(Mit 10 Abbildungen)

Eine Apparatur wird beschrieben, die es ermöglicht, kleinste, von einzelnen β -Teilchen in Luft oder Argon erzeugte Ionenmengen derart proportional zu verstärken, daß sie auf dem Schirm eines Kathodenstrahloszillographen Auslenkungen des Lichtfleckes hervorrufen, die den primären Ionenmengen proportional sind. Hierzu findet eine Stoßverstärkungsstrecke mit anschließendem Röhrenproportionalverstärker Verwendung. Die Registrierung erfolgt photographisch. Die Ausschläge des Elektronenstrahls werden mit einer Kipp-schwingung auseinandergezogen und mit einer Kleinbildkamera so aufgenommen, daß die Verschlußgeschwindigkeit der Kippfrequenz entspricht. Dadurch erhält man stets einen einzigen Kurvenzug pro Aufnahme, was die Auswertung erheblich erleichtert. Die Eigenschaften des Verstärkers sowie seiner einzelnen Daten werden diskutiert; es werden einige Messungen an β -Teilchen des RaE gezeigt.

I. Einführung

Die Ionenmengen, die ein einzelnes β -Teilchen erzeugt, hat Zipprich²⁾ mit einer Anordnung nachgewiesen, deren Kernstück eine Verstärkungsstrecke ist, in der diese Ionenmengen durch proportionale Stoßionisation meßbare Größe erhalten. Die Spannung liegt dabei zwischen einem Gitter, über dem die primären Ionen erzeugt werden, und einem Auffänger, der als Schutzringkondensator ausgebildet ist und dessen Schutzring an Erde liegt. Der Auffänger ist mit dem System eines Hoffmannschen Duantenelektrometers verbunden, dessen Ausschläge photographiert werden. Später ist es Winkler³⁾ gelungen, mit einer ähnlichen Apparatur, die nur noch eine zweite Stoßverstärkungsstrecke besaß, so daß sich die Verstärkungsfaktoren beider Strecken multiplizierten, einzelne, aus einem Glühdraht austretende Elektronen nachzuweisen. Die Verwendung des Duantenelektrometers hatte den Vorteil, die Anordnung sehr empfindlich zu machen; leider muß man aber dabei die lange Einstelldauer des Instrumentes in Kauf nehmen, die eine Teilchen-

1) D 15.

2) B. Zipprich, Ztschr. f. Phys. **85**, S. 592. 1933.

3) E. H. Winkler, Ztschr. f. Phys. **107**, S. 235. 1937.

frequenz über 10—15 in der Minute nicht zuläßt. Es mußte daher, um die Methode für kernphysikalische Untersuchungen bequem verwendbar zu machen, von der Verwendung des Duantenelektrometers Abstand genommen und ein schnell registrierendes Instrument benutzt werden.

II. Die Apparatur

Es wurde also ein Röhrenproportionalverstärker in Verbindung mit einer Verstärkerstrecke nach Zipprich und einem Elektronenstrahloszillographen verwendet. Die für die Stoßverstärkung erforderliche hohe Spannung wurde einem Gleichstromgenerator entnommen. Auf die Stabilisierung der Spannung wurde größte Aufmerksamkeit verwendet. Nach einer ersten Siebung über parallelgeschalteten Kondensator und in Reihe geschaltete Sekundärwicklungen zweier großer Funkeninduktoren von hoher Selbstinduktion wurde die Spannung in den Versuchsraum geleitet. (Wegen der starken Störungen mußte die Maschine in einem Nebenraum arbeiten.) Unmittelbar vor der Ionisationskammer sorgte ein zweiter Blockkondensator für das Abfiltern der in der Leitung induzierten Rundfunkfrequenzen, hinter dem ein hochisolierender Minos-Verdichter (Firma Schott & Söhne, Jena) durch einen Widerstand aufgeladen wurde. Dieser Widerstand war so bemessen, daß nur soviel Ladung auf den Kondensator fließen konnte, wie durch Isolations- und Entladungsverluste verloren ging. Der Kondensator diente somit als eigentliche Spannungsquelle für die Stoßverstärkungsstrecke. Die Spannungsmessung an der Kammer mußte stromlos erfolgen, es wurde eine Kompensationsanordnung [nach Heß¹⁾] mittels Duantenelektrometer gewählt.

Als Nachweisinstrument diente der große Philips-Kathodenstrahloszillograph Type GM 3152, wobei dessen Verstärker für den Großteil der Messungen ausgeschaltet war. Der Lichtfleck wurde durch eine Kippschwingung zeitproportional in der Abszisse abgelenkt, so daß die in Ordinatenrichtung auftretenden Auslenkungen durch ionisierende Teilchen einen steilen Anstieg und exponentiell verlaufenden Abfall zeigten. Aufgenommen wurde mit einer Kleinbildkamera (Leitz, Wetzlar) und dem Leitzverkleinerungsgerät 1:1,5 auf Agfa-ISS-Film (21/10° DIN), der bei Blende 2,0 und nicht zu hellem Lichtfleck sehr gut auswertbare Negative lieferte. Die Kippfrequenz entsprach der Verschußgeschwindigkeit, so daß immer ein Kurvenzug auf jede Aufnahme kam. Diese Aufnahmetechnik erforderte eine hohe Teilchenfrequenz. Bei Aufnahmen zur Aufstellung von

1) E. Heß, Ztschr. f. Phys. 83. S. 698. 1933.

Statistiken wurde alle 3 Sek. belichtet; dabei erfolgte das Auslösen und Weiterdrehen des Filmes von Hand. Bei einem Streifen von 39 Bildern dauerte die Meßreihe also etwa 2 Min. Während dieser Zeit durfte die Schwankung des Druckes mit höchstens 0,01 mm angenommen werden¹⁾. Bei der späteren Verwendung von Argon als Füllgas mußte eine Schwankung von 0,1 mm zugelassen werden, da die in Ermangelung von Tombakrohr verwendeten Gummischläuche Argon absorbierten und während der Messungen wieder abgaben.

Weitere Vorteile der kurzen Versuchszeiten waren die Konstanz der Spannungen auf mindestens 1% und die Konstanz der Röhrenverstärkung, die im Rahmen der Meßgenauigkeit absolut war, wenn man die etwa $\frac{1}{2}$ stündige Anlaufzeit beachtete. Auch blieb die Anzahl der Störteilchen in kleinen Grenzen: nach sorgfältigem Säubern des Gitterblocks, des Auffängers, wie des gesamten Ionisationsraums und der Unterdruckkammer wurden durchschnittlich etwa 0,5 Stör- α -Teilchen pro Minute beobachtet. Bei der großen Frequenz der eingestrahnten Teilchen spielten sie gar keine Rolle, und es wurde auf weitere Säuberung keine Zeit verwendet.

III. Diskussion der Eigenschaften des Verstärkers

a) Der Röhrenproportionalverstärker

Die Schaltung des Verstärkers war grundsätzlich die gleiche, wie sie von Greinacher²⁾ erstmalig angegeben und danach vielfach verwendet worden ist³⁾. Neu ist lediglich die Einführung zweier Spezialpentoden (Philips 4696) mit einer Stufe Elektronenvervielfachung, die hohe Steilheit und damit hohe Verstärkung bewirkt⁴⁾. Diese Verstärkung war so hoch (800 fach), daß bereits eine Röhre genügt hätte. Um aber nicht ins Maximum der Verstärkung

1) Diese Zahl ist gewonnen, indem man den Druckanstieg über eine längere Zeit beobachtete und unter Annahme stetiger Veränderung für die Aufnahmedauer — 2 Min. — berechnete.

2) Der erste von Greinacher angegebene Verstärker (Ztschr. f. Phys. 36. S. 364 1926) besitzt noch Transformatorkopplung, die eine proportionale Verstärkung unmöglich macht. Die hier benutzte Schaltung findet sich für diesen Zweck erstmalig verwendet bei Greinacher, Ztschr. f. Phys. 41 S. 319 1927.

3) E. Ramelet, Ann. d. Phys. 86. S. 871. 1928; G. v. Droste, Ztschr. f. Phys. 110. S. 84. 1938; A. F. Kovarik u. Adam, Phys. Rev. 54. S. 413. 1938; R. B. Roberts, Rev. Sc. Instr. 9. S. 98. 1938; O. Laaf, Ann. d. Phys. [5] 32. S. 747. 1938; I. R. Dunning, Rev. Sc. Instr. 5. S. 387. 1934; H. Fränz, Phys. Ztschr. 30. S. 810. 1929; Ztschr. f. Phys. 63. S. 370. 1930.

4) Das Grundsätzliche über diese Röhren findet sich bei I. O. M. Strutt, Moderne Mehrgitterröhren, Berlin 1939, Bd. I. S. 40, Bd. II. S. 117.

gehen zu müssen, wurde der Verstärker mit einer Stufe mehr ausgerüstet. Vorversuche hatten gezeigt, daß im Maximum eine Neigung zum Schwingen vorhanden war; ebenso ist die Einstellung der Gitterpotentiometer dann sehr kritisch. Die endgültige Schaltung zeigt Abb. 1.

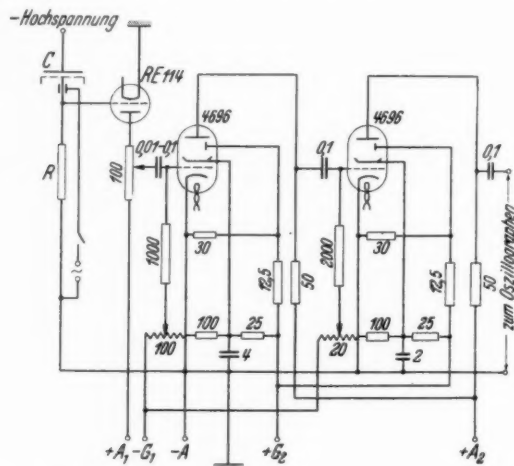


Abb. 1. Die Schaltskizze des Röhrenproportionalverstärkers ist gezeigt, wobei die Widerstände in kOhm und die Kondensatoren in μF angegeben sind. Die einzelnen Spannungen betragen: A_1 bis 50 Volt, A_2 bis 300 Volt, G_1 bis -20 Volt und G_2 bis 250 Volt. Die Einstellung der Gitterpotentiometer ist für den Verstärkungsfaktor und die Proportionalität der Verstärkung maßgebend. Über die Wahl der Größe des Widerstandes R wie über die Eichung des Verstärkers vgl. den entsprechenden Absatz im Text

Schwierig war die Lösung der Frage des Eingangswiderstandes R . Dieser verursacht hauptsächlich durch den Johnson-effekt¹⁾ ein Rauschen, das hoch verstärkt eine Unruhe des Oszillographen-Nullflecks hervorruft. Strahlt man ionisierende Teilchen über dem Auffänger ein, so ist das Verhältnis Effekt:Störspiegel ungünstig. Gewöhnlich hilft man sich in der Form, daß man auf den Widerstand überhaupt verzichtet²⁾ und die positiven Ionen auf den Auffänger treffen läßt. Das Gitter lädt sich dadurch positiv auf, und bleibt auf einem konstanten Potential, wenn die Ableitung

1) I. B. Johnson, Phys. Rev. **32**. 97. 1928.

2) G. v. Droste, Ztschr. f. Phys. **110**. S. 87. 1938. Herr v. Droste war so liebenswürdig, mir hierzu wertvolle Ratschläge zu geben, wofür ich ihm großen Dank schulde.

durch Gitterstrom und Isolationsverluste der Aufladung die Waage hält. Da der in Rede stehende Verstärker mit Elektronenstoß über dem Auffänger arbeiten sollte, hätte sich das Gitter negativ aufgeladen, wodurch der Anodenstrom sehr bald gesperrt worden wäre. Der Gitterwiderstand war daher unvermeidlich. Seine Größe wurde mit Rücksicht auf die gewünschte Zeitkonstante und im Hinblick auf die Ergebnisse der Berechnungen von Stetter¹⁾ zu 10^{11} Ohm gewählt. Verwendung fand ein Massewiderstand der Firma White USA., dessen Konstanz recht gut war²⁾. Die gesamte Rauschspannung des Verstärkers äußerte sich in einer Unruhe des Nullfleckes des Oszillographen, deren Amplitude gemessen werden konnte. Sie entsprach Ausschlägen von etwa 3500 Ionen am Auffänger, eine Unsicherheit, die die Fehlergrenze aller Messungen bestimmt (der Störspiegel).

Diese Zahl erhält man, indem man den Röhrenverstärker auf einen bestimmten Verstärkungsfaktor bringt und in die Ionisationskammer α -Teilchen einschließt, deren bekannte Ionenmenge m auf dem Schirm des Oszillographen einen bestimmten Ausschlag p cm ergeben. $m p$ ist dann die Empfindlichkeit des Verstärkers in Ionen/cm. Damit ist eine Skala festgelegt, die jedem Ausschlag eine Ionenmenge zuordnet. Die gesamte Rauschspannung des Verstärkers äußert sich, wie gesagt, in einer Unruhe des Nullfleckes. Es ist für die weiteren Überlegungen bequem, den Verstärker als ideal störungsfrei aufzufassen und die Amplitude der Unruhe formal auf Ionenmengen zurückzuführen, die in unregelmäßigen, jedenfalls kleinen, Zeitintervallen auf den Auffänger treffen.

Man ersieht aus der Größe dieser Zahl sofort, wie groß die Ionenmengen sein müssen, die einwandfrei vom Nulleffekt unterscheidbar sein sollen. In unserem Fall sind das mindestens 10000 Ionen. Ein α -Teilchen erfüllt diese Bedingung ohne weiteres, wenn es über dem Auffänger 2 cm Weg zurücklegt.

Die übrigen Daten der Schaltelemente entsprachen den üblichen Dimensionen. Der Verstärker war überaus erschütterungsempfindlich. Er wurde deshalb in einen stabilen Aluminiumkasten von der Wanddicke 1,2 cm eingebaut und als Ganzes in Watte eingepackt in einen großen Metallkasten $50 \times 35 \times 45$ cm gesetzt, der elektrostatisch vollkommen abgeschirmt war. Weiche abgeschirmte Litzen dienten als Stromzufuhr. Die erste Röhre war in einem besonderen Kasten untergebracht und direkt unter der Ionisationskammer angeordnet.

Es wurden umfangreiche Vorversuche mit der Plattenröhre von Philips (4060) als erster Röhre vorgenommen. Es zeigte sich jedoch, daß deren Spannungsverstärkung ($\approx 0,7$) in einem sehr ungünstigen

1) G. Stetter, Wien. Ber. 142. S. 481. 1933.

2) Der Widerstand nahm im Lauf der Zeit langsam zu, offenbar mit steigender Trockenheit.

Verhältnis zur hohen Rauschamplitude stand. Da nun auch beabsichtigt war, mit großen Teilchenzahlen zu arbeiten, fiel die hohe Isolation der Röhre weniger ins Gewicht. Die Aufladung mußte doch durch einen Widerstand abgeleitet werden, um der Gefahr der Sperrung des Anodenstromes zu begegnen¹⁾.

Daher wurde eine gewöhnliche serienmäßige Lautsprecherröhre (Telefunken Re 114), die wegen ihrer niedrigen Rauschspannung unter einer ganzen Anzahl anderer Röhren ausgewählt worden war, nach Entfernung ihres Bakelitsockels eingebaut. Der wirksame Widerstand vor der ersten Röhre betrug sicher $> 10^{10}$ Ohm. Bei einer Anodenspannung von 30 Volt ergab sich jetzt ein viel günstigeres Bild, die Spannungsverstärkung betrug etwa 7 bei $R_a = 50000$ Ohm, dazu war die Rauschspannung erheblich kleiner. Diese Röhre wurde bei allen folgenden Messungen verwendet. Die Eichung des Verstärkers und die Prüfung seiner Proportionalität erfolgte mittels eingeschossener α -Teilchen. Diese wurden aus der Kanone über dem Gitter eingeschossen, und die erzeugten Ionenmengen gelangten unverstärkt auf den Auffänger. Da die Ionisierungsstrecke immer die gleiche war, ließ sich die primäre Ionenmenge berechnen. Verminderte man nun den Druck in der Kammer, so verringerte sich die Ionenmenge in gleichfalls berechenbarer Weise. Die Größe der beobachteten Ausschläge wurde nun als Funktion der primären Ionenmenge betrachtet. Es ergab sich strenge Proportionalität. Im späteren Betrieb wurde die Konstanz der Verstärkung durch eine Wechselspannung kontrolliert, die an den Influenzring gelegt werden konnte²⁾.

Eine absolute Empfindlichkeitsbestimmung oder Eichung der Verstärkers mit Wechselstrom ist nicht möglich. Der Grund liegt im wesentlichen darin, daß periodische Vorgänge ganz andere Verstärkungsbedingungen finden als die stoßartigen Einzelimpulse von ionisierenden Teilchen. Dazu kommen Phasenverschiebungen in ganz unübersichtlicher Weise, die bewirken können, daß ein zusätzliches Wechselfeld, etwa von der Lichtleitung herrührend, die Amplitude des Oszillographenausschlages verkleinert. Eindeutig ist nur die Kontrolle der Konstanz des Verstärkungsfaktors. Seine absolute Größe muß unmittelbar durch α -Teilchen festgestellt werden.

1) Der insgesamt wirksame Widerstand des Gitterkreises der ersten Röhre setzt sich aus dem Widerstand R und dem Isolationswiderstand Gitter-Kathode der Röhre zusammen. Die exakte Größe des Gesamtwiderstandes ist nicht von Interesse, wenn er nur die Zeitkonstante nicht übermäßig verkleinert und die höheren Rauschfrequenzen nicht allzu merkbar werden läßt.

2) E. Wilhelmi, Ztschr. f. Phys. 107. S. 771. 1937. Herr Professor Dr. W. Bothe hatte die große Freundlichkeit, mir gelegentlich eines Besuches in Heidelberg Erklärungen zu diesem Punkt zu geben. Ich möchte ihm auch an dieser Stelle dafür bestens danken.

Es bestand überdies die Möglichkeit, Gleichspannungsstöße auf den Auffänger zu influenzieren.

b) Der Zipprichverstärker

Die von β -Teilchen in Luft primär erzeugten Ionenmengen sind so gering, daß die von ihnen am Oszillographen hervorgerufenen Ausschläge in der Unruhe durch Röhren- und Widerstandsrauschen untergehen. Sie müssen daher vor dem Röhrenverstärker bereits so verstärkt werden, daß sie deutlich über dem (angenommenen) Störionenspiegel liegen. Sie werden also durch eine Stoßverstärkung aus den Störspiegel herausgehoben. Die hierbei auftretenden Erscheinungen sind von Townsend¹⁾ behandelt und erklärt worden.

1. Einfluß der Feldstärke, des Gasdruckes und der Streckenlänge auf die Verstärkung

Aus den Ergebnissen der Townsendschen Messungen und Überlegungen entnehmen wir, daß die Zunahme von Ionen durch Stoß schnell bewegter Teilchen durch die Beziehung

$$(1) \quad \frac{P(l)}{P_0} = x = \frac{(\alpha - \beta) e^{(\alpha - \beta)l}}{\alpha - \beta e^{(\alpha - \beta)l}}$$

gegeben ist, wenn P die Ionenzahl, α der Volumionisationskoeffizient der negativen, β der der positiven Ionen und l die Stoßstrecke ist, wobei wir bei der Oberflächenionisation durch Aufprall positiver Ionen auf die Kathode absehen können, was für $x < 5000$ möglich ist²⁾, insbesondere bei den hier verwendeten kleinen Abständen Gitter-Auffänger.

Da β erst bei Werten des Quotienten Feldstärke: Druck $\frac{E}{p} > 160$ für Argon, > 300 für Luft einsetzt, kann es für das uns interessierende Gebiet $60 < \frac{E}{p} < 120$ außer Betracht bleiben. Es bildet bei den geringen Verstärkungsfaktoren x , die hier benötigt werden, nur ein fast unmerkliches Korrektionsglied nach größeren x -Werten hin. Es bleibt die Volumionisation durch Elektronen. Mit $\beta = 0$ wird (1)

$$(2) \quad x = e^{\alpha l}.$$

Wie aus Abb. 2 ersichtlich, kann die Funktion α/p für den uns interessierenden Abschnitt für Luft und Argon durch je eine Gerade recht gut angenähert werden.

1) I. S. Townsend, Handbuch der Radiologie I.

2) B. Zipprich, a. a. O.

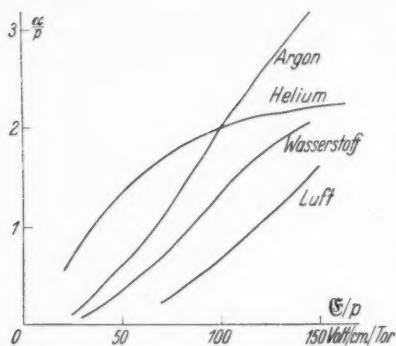


Abb. 2. Die Kurven zeigen den Verlauf des Volumionisationskoeffizienten der negativen Ionen als Funktion des Quotienten \mathcal{U}/p für einige Gase nach Townsend, Handb. d. Rad. I. Für große Werte \mathcal{U}/p können die Kurven durch eine Gleichung der Form

$$\alpha_{p=1} = C e^{-\frac{cV}{\mathcal{U}}} \quad (C \text{ und } V \text{ sind für das Gas charakteristische Konstante) \text{ recht gut angenähert werden. Für den uns interessierenden Bereich } 60 < \frac{\mathcal{U}}{p} < 120$$

für Luft bzw. $30 < \frac{\mathcal{U}}{p} < 130$ für Argon werden die Kurven durch Gerade $\alpha = c\mathcal{U} - c'p$ mit genügender Genauigkeit dargestellt

Für Argon liegen Untersuchungen über den Verlauf der Kurve von kleinsten bis zu größten \mathcal{U}/p Werten vor¹⁾. Nach diesen Arbeiten nimmt die Funktion α/p mit wachsendem \mathcal{U}/p nicht monoton zu, sondern erreicht für $\frac{\mathcal{U}}{p} = 700$ ein Maximum, um dann abzufallen. Bei dem hier vorliegenden Problem dürfen wir von diesen Effekten, die auch für Helium bekannt sind, ganz absehen und die Gerade annehmen, die für das angegebene Intervall $60 < \frac{\mathcal{U}}{p} < 120$ auch von den zitierten Forschern bestätigt wird.

Das ergibt:

$$(3) \quad \alpha = c\mathcal{U} - c'p$$

und mit

$$\mathcal{U} = \frac{U}{l}$$

wird (2)

$$(4) \quad x = e^{c\mathcal{U} - c'pl}.$$

Den Einfluß kleiner Änderungen von U , l , p erhält man durch Differentiation von (4)

$$(5) \quad \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial U} dU + \frac{\partial x}{\partial l} dp + \frac{\partial x}{\partial p} dl \\ \frac{dx}{x} = cdU - c'(pdl + ld p). \end{cases}$$

1) A. A. Kruithof u. F. M. Penning, Physica 3. S. 529. 1936; Dieselben ebenda 4. S. 447. 1937; s. auch W. S. Huxford, Phys. Rev. 55. S. 754. 1939.

Die Konstanten sind

$$\left. \begin{array}{l} c = 0,0169 \\ c' = 0,98 \end{array} \right\} \text{ für Luft}$$

$$\left. \begin{array}{l} c = 0,0288 \\ c' = 0,92 \end{array} \right\} \text{ für Argon.}$$

Mit diesen Werten und den bekannten Fehlern der Größen U , l und p ist man in der Lage, den auftretenden prozentischen Fehler bei jedem Verstärkungsfaktor dx/x , d. h. bei jeder Kombination der drei Größen, abzuschätzen. Hier interessierte speziell der Verstärkungsfaktor $x = 1000$. Die Abb. 3 zeigt die zum Erreichen

Abb. 3. Näherungsweise Darstellung der Funktion

$$x = x(U, l, p)$$

für $x = 1000$. Der Darstellung liegt die Gleichung

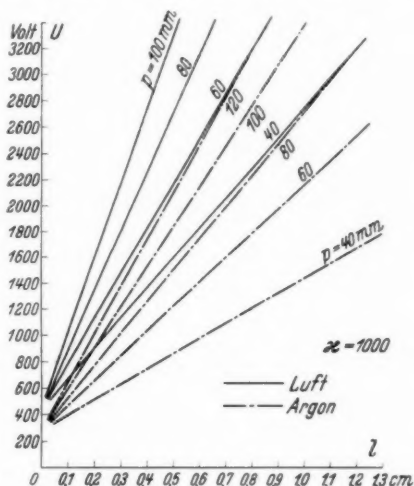
$$\log x = (cU - c'p) \log e$$

zugrunde. Nicht jeder Kurvenpunkt hat einen physikalischen Sinn. Man hat in jedem Einzelfall zu prüfen, ob die Bedingung

$$60 < \frac{U}{p} < 120 \text{ für Luft,}$$

$$30 < \frac{U}{p} < 130 \text{ für Argon}$$

noch erfüllt ist. Die Kurven geben lediglich Anhaltspunkte für die Berechnung der Schwankung des Verstärkungsfaktors. Wollte man nach diesen Kurvenpunkten die tatsächliche Verstärkung und die zu dieser notwendigen Daten ermitteln, so müßte man der Zeichnung eine bessere Formel zugrunde legen, nicht die hier benutzte in Logarithmen lineare Gleichung



dieses Verstärkungsfaktors notwendigen Kombinationen für Luft und Argon. Der jedesmal auftretende prozentische Fehler dx/x ist in Tab. 1 nach Gl. (5) berechnet, und es sind $dl = 0,001$ cm, $dp = 0,1$ mm und $dU = 0,01 U$ angenommen, da diese Werte den tatsächlichen Gegebenheiten unserer Apparatur entsprechen. Man arbeitet mithin um so günstiger, je kleiner die zum Erreichen eines bestimmten Verstärkungsfaktors erforderliche Spannung¹⁾ ist, d. h. man muß Druck und Abstand genügend klein machen. In der

1) Die Abhängigkeit des Fehlers von der Spannung wird erheblich kleiner, wenn es gelingt, U auf 1‰ zu stabilisieren. Für diesen Fall ist die entsprechend bezeichnete Spalte in Tab. 1 berechnet.

Tabelle ist jedoch die obere Grenze des Fehlers berechnet, da Volum- und Oberflächenionisation der positiven Ionen den Verstärkungsfaktor 1000 schon bei etwas geringerer Spannung erreichen lassen. Bei Verwendung von Argon liegen alle Werte dx/x günstiger, da hier eine geringere Spannung für den gleichen Verstärkungsfaktor bei sonst gleichen Dimensionen erforderlich ist. Man wird also zweckmäßigerweise stets Argon verwenden. Der Druck mußte in unserem Fall > 70 mm Hg sein, da kleinere p die primären Ionenmengen pro Zentimeter schon statistisch schwanken lassen.

Tabelle 1

$\frac{p_{\text{mm}}}{l_{\text{cm}}}$	Luft						Argon					
	$\Delta U = 1\%$			$\Delta U = 1\%$			$\Delta U = 1\%$			$\Delta U = 1\%$		
	60	80	100	60	80	100	80	100	120	80	100	120
0,1	19,6	23,5	27,5	8,1	10,3	12,5	22,7	26,2	29,8	9,7	11,7	13,7
0,2	26,4	32,4	38,3	9,7	12,1	14,4	30,8	36,3	41,9	11,4	13,5	15,7
0,3	33,2	41,4	49,1	11,1	13,7	16,3	39,3	46,6	54,2	13,1	15,5	17,8
0,4	40,1	49,9	59,8	12,7	15,5	18,3	47,4	56,7	62,8	14,7	17,3	19,5
0,5	47,1	58,8	70,7	14,3	17,3	20,3	55,5	66,8	75,0	16,4	19,1	21,5
0,6	54,0	67,6	81,4	15,9	19,1	22,3	63,9	76,9	86,8	18,0	20,9	22,5
0,7	60,7	76,6	92,2	17,5	20,9	24,3	72,2	87,0	98,6	19,5	22,7	25,5
0,8	67,5	85,1	103,0	19,0	22,6	26,1	80,4	97,2	110,6	21,4	24,7	27,6
0,9	74,0	94,0	113,7	20,5	24,3	28,1	88,9	107,3	125,3	23,0	26,5	29,9
1,0	80,9	103,0	124,6	22,1	26,1	30,1	97,2	117,4	137,3	24,7	28,3	31,9

Berechnet ist die prozentische Schwankung des Verstärkungsfaktors dx/x als Funktion der Sagspannung, des Druckes und der Entfernung Gitter-Aufhänger für $x = 1000$. Dabei sind Schwankungen des Druckes bis 0,1 mm zugelassen; für Spannungsschwankungen von 1% und 1% ist jeweils eine besondere Spalte gerechnet.

2. Einfluß der Gitterdimensionen auf die Verstärkung

Um die günstigste Größe der Gitterkonstanten, des Drahtdurchmessers usw. zu finden, stellt man folgende Überlegung an: Jedes ionisierende Teilchen bewirkt einen Ausschlag am Oszillographen. Dieser Ausschlag ist im Idealfall der primär erzeugten Ionenmenge genau proportional. Man muß jedoch darauf achten, daß die Zeit t_0 , die zum Abscheiden der Ionen benötigt wird, immer klein bleibt gegen die Zeitkonstante τ des Röhrenverstärkers, die durch das kleinste Produkt CR zweier zusammengehöriger Kopplungsglieder Kondensator-Widerstand bestimmt ist. In unserem Falle war das Kopplungsglied vor der ersten 4696 maßgebend, τ war 0,01 Sek.

t_0 ist von der Wanderungsgeschwindigkeit u der Ionen abhängig. Diese ist eine Funktion des Quotienten Feldstärke : Druck \mathcal{E}/p . Experimentell ergibt sich, daß diese Funktion für kleine Werte durch die Formel

$$(6) \quad u = \text{const} \cdot \frac{\mathcal{E}}{p}$$

recht gut dargestellt werden kann. Für große Werte wächst u jedoch stärker als proportional¹⁾.

Die Laufzeit des Ions vom Ort seiner Erzeugung bis zum Auffänger setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

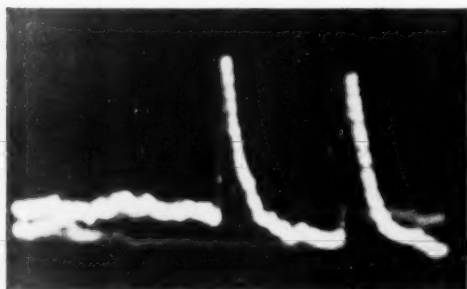
1. der Zeit, die das Ion zum Durchmessen der Strecke vom Ort seiner Erzeugung bis zum Gitter benötigt,
2. der Zeit, in der es vom Gitter zum Auffänger läuft.

Der Anteil 2 ist die eigentliche „Abscheidezeit“, die mit der Zeitkonstante des Röhrenverstärkers verglichen werden muß. Der Anteil 1 liefert hierzu keinen Beitrag, sofern nur die Zeit zwischen dem Gitterdurchtritt des ersten und des letzten Ions einer Kolonne gegen τ zu vernachlässigen ist; man zeigt auch leicht, daß auf dieser Strecke die Rekombinationsmöglichkeiten noch so gering sind, daß sie die Ergebnisse nicht verfälschen können. Der geringe Druck und die kurze Laufzeit der Ionen — die sich aus der berechenbaren Feldverteilung hinter dem Gitter ergibt — lassen nicht einmal die für Messungen mit α -Teilchen sonst oft störende Kolonnenionisation merkbar werden. Die Durchführung der Rechnung für 2 ergibt Zeiten $t_0 < 2 \cdot 10^{-3}$ sec bei $p = 80$ mm Hg und $l = 0,3$ cm. Die Zeitkonstante betrug immer $\tau > 0,01$ sec, die geforderte Bedingung: Kleinheit der Abscheidezeit gegenüber der Zeitkonstanten des Verstärkers war also stets erfüllt.

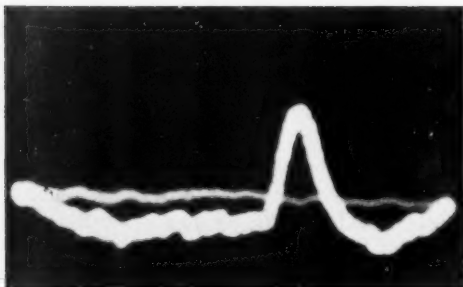
Die Teilchen wurden möglichst dicht über dem Gitter eingestrahlt, ihre geometrische Streuung durch starkes Ausblenden auf ein Minimum (2^o) gebracht. Dabei wurde ferner beachtet, daß ein Teilchen in möglichst gleichbleibender Entfernung vom Gitter dahin fliegen muß, damit die näher an diesem erzeugten Ionen nicht schneller ins Feld gezogen werden, als die weiter vom Gitter erzeugten, entsprechend dem dort kleineren Durchgriff, und der längeren, im schwachen Feld zurückzulegenden Strecke.

Eine Verkleinerung der Gitterkonstanten a vermindert die Streuung so lange, bis der allzu kleine Durchgriff die Laufzeiten

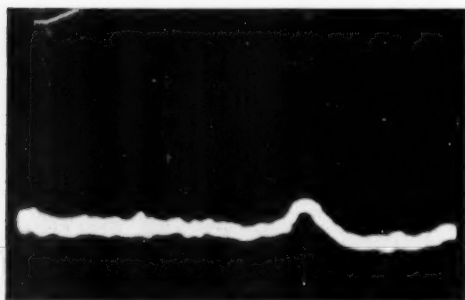
1) I. S. Townsend, Handb. d. Rad. I. Vgl. auch K. Przibram, Handb. d. Phys. XXII. Allerdings gibt Townsend an, daß u auf eine Verminderung des Druckes rascher anspricht als auf eine Erhöhung der Feldstärke.



a)



b)



c)

Abb. 4. Die Abbildung zeigt α -Teilchen: bei a) ist die Abscheidezeit t der erzeugten Ionenmenge klein gegen die Zeitkonstante τ des Röhrenverstärkers, bei b) sind t und τ vergleichbar, und der Ausschlag ist entsprechend deformiert. c) zeigt noch ungünstigere Verhältnisse

über dem Gitter und damit die Wahrscheinlichkeit der Rekombination anwachsen läßt. Es zeigt sich jedoch, daß bei den auf unseren Drehbänken herstellbaren Gittern ($a_{\min} = 0,15$ mm) dieser Effekt noch nicht auftritt. Dagegen ist die Verlängerung der Abscheidezeit t_0 bei Verminderung der Saugspannung leicht zu beobachten. Ein Teilchen, dessen Ionenmenge in einer Zeit $t \ll \tau$ abgeschieden wurde, wird in der Form a Abb. 4 nachgewiesen. Abb. 4b zeigt ein Teilchen, dessen Ionenmenge in einer Zeit $t_0 \approx \tau$ abgeschieden worden ist. Endlich kann man bei genügend kleiner Saugspannung vollkommen verzerrte Ausschläge photographieren (Abb. 4c).

Vergrößerung der Gitterkonstante bewirkt eine größere Inhomogenität des Feldes in der Nähe des Gitters, damit eine Entfernung vom Ideal der ebenen Äquipotentialfläche. Die Ionen treten im allgemeinen nicht mehr senkrecht durch die Gitterebene und durchlaufen demzufolge etwas verschiedene Strecken im Verstärkerfeld. Die Streuung muß also zunehmen. Man kann den Einfluß der Gitterdimensionen auf die Streuung messend verfolgen, wenn man einige Meßreihen macht, derart, daß man für stets gleichen Verstärkungsfaktor Statistiken der Ausschlagsgrößen aufnimmt.

Dabei erscheint es zweckmäßig, eine von der üblichen Art abweichende Methode der statistischen Auswertung zu bevorzugen.

Gewöhnlich geschieht die Auswertung der Registrierstreifen in der Weise, daß man alle Ausschläge nebeneinander von einer Linie $k = 0$ aus in Ordinateurichtung aufträgt. Dann teilt man die Ordinate in äquidistante Abschnitte und zieht entsprechende Linien $k = \text{const}$. Die Fläche wird so in gleichbreite, der Grundlinie parallele Streifen geteilt. Nun zählt man die in einem solchen Streifen befindlichen Meßpunkte aus, und trägt diese Zahl in ein neues Diagramm als Ordinate über dem — in der Abszisse aufgetragenen — zugehörigen Stück Δk auf. Es entsteht dann eine Treppenkurve, aus der auf das Vorhandensein von Häufungsstellen der Ausschlagsgrößen geschlossen werden kann. Nun sieht man leicht, daß eine etwas andere Streifenbreite Δk auch die Form der Treppenkurve um so mehr beeinflußt, je weniger Teilchen die Statistik enthält. Ganz ausgeschlossen erscheint es z. B., einen einigermaßen definierten Wert für die „Breite der Verteilung“ anzugeben. Dagegen ist die Aussage über die allgemeine Lage von Häufungsstellen an Hand dieser Methode durchaus brauchbar. Will man eine Aussage über die Form der Verteilung machen, muß eine andere Auswertungsmethode zur Anwendung kommen.

Man trägt die Ausschläge mit ihrer wahren Größe als Abszisse in ein Diagramm so ein, daß man für jeden Ausschlag um eine Einheit in Ordinateurichtung fortschreitet. Man erhält dabei eine Kurve, $N(< k) = f(k)$, die sich zur gewöhnlich angegebenen verhält wie das Integral zum Differential. Ist die Verteilung eine reine

Fehlerverteilung, erhält man im ersten Fall eine Gaussfunktion, im zweiten das Fehlerintegral¹⁾.

Dieses Verfahren ist im folgenden stets benutzt worden, die Treppenkurve ergab sich in Auswertung der Aufnahmen, die Werte des Fehlerintegrals wurden der Tafel von Hayaschi²⁾ entnommen. Dort ist die Funktion:

$$(7) \quad \Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

für $\gamma = 0$ bis 3 tabuliert. Der Ordinatenmaßstab wurde so normiert, daß

$$\Phi(\gamma) = 1 \rightarrow n_{\text{gesamt}} - n_{\text{mittelp.}}$$

entsprach. Der Abszissenmaßstab, d. h. die Einheit für γ , wurde variiert, bis die beste Übereinstimmung mit der Treppenkurve erzielt war. Die „Breite“ der Verteilung ergab sich durch Differentiation von (7)

$$(8) \quad \varphi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^2},$$

wobei $\gamma = 1$ den Abszissenwert bedeutet, für den die Gaussverteilung auf den e -ten Teil des Maximums abgeklungen ist. Man kann nun die Einheit von γ mit der wahrscheinlichsten Ausschlagsgröße vergleichen und erhält so ein Maß für die Streuung.

Abb. 5 zeigt die Berechnung der Streuung für einen bestimmten Verstärkungsfaktor, hier $x = 1000$. Eingestrahlt wurden α -Teilchen einer definierten Gruppe; der Röhrenverstärker war entsprechend unempfindlich gemacht. Es ergab sich eine Ausschlagsgrößenverteilung, die in Abb. 5 in integraler Darstellung gezeigt ist (die Treppenkurve). Wenn es sich tatsächlich um eine Fehlerverteilung um einen Mittelwert handeln sollte, mußte es eine Fehlerintegral-

1) Es liegt in der Natur der Statistik über nicht *sehr* viele Teilchen, daß diese Kurven nur angedeutet erfüllt sind, es ist aber viel leichter, durch eine auf Grund der zweiten Methode gewonnene Treppenkurve eine berechnete Fehlerintegralkurve so zu legen, daß die Treppe möglichst gut angenähert wird, als es bei der ersten Methode und einer berechneten Gaussfunktion möglich wäre. Man muß allerdings beachten, daß auch die zweite Methode Grenzen der Anwendung hat. Es wird im allgemeinen schwierig sein, im Falle zweier nahe beisammen liegender Gruppen in der Verteilung zwei Fehlerkurven so zu superponieren, daß sie die beobachtete Verteilung möglichst gut annähern. Die Schwierigkeit erhöht sich beim Vorhandensein mehrerer Gruppen.

2) K. Hayaschi, Fünfstellige Funktionentafeln, Springer, Berlin 1930.

kurve geben, die die Treppe möglichst gut annäherte. Es zeigt sich, daß eine Kurve der Gleichung

$$(9) \quad \Phi(k - k_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(k - k_0)} e^{-t^2} dt$$

Abb. 5. Berechnung der „Breite der Verteilung“ von Ausschlagsgrößen. Die Treppenkurve ergibt sich beim Ausmessen der registrierten Ausschläge, die glatte Kurve stellt eine Fehlerintegralkurve dar, die so normiert ist, daß sie die Treppenkurve möglichst gut annähert. Im Text ist gezeigt, wie sich daraus die „Breite der Verteilung“ errechnet

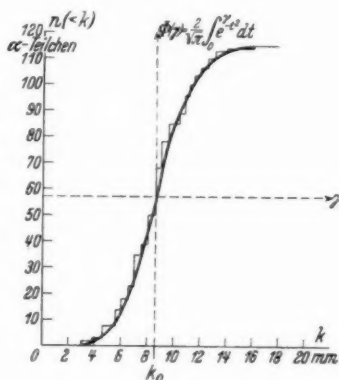
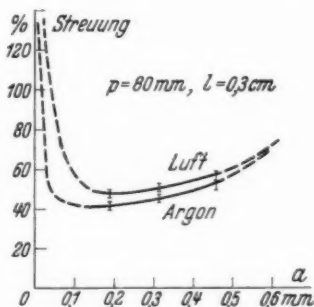


Abb. 6. Einfluß der Gitterdimensionen auf die Streuung der Ausschlagsgrößen. a ist der Abstand der Gitterdrähte in Millimeter; der Einfluß verschiedener Drahtstärken war nicht mit Sicherheit nachzuweisen. Die einzelnen Kurvenpunkte sind mit der in Abb. 5 gezeigten Methode errechnet worden



die Treppe sehr gut annähert, wenn für $k - k_0 = 1$ der Wert 3,3 mm gesetzt wird. Daraus ergibt sich die Streuung

$$k_0 = 8,5 \text{ mm}$$

$$k - k_0 = 3,3 \text{ mm}$$

also 40%; sie ist in Abb. 6 für Argon bei einem Abstand der Gitterdrähte von $a = 0,18 \text{ mm}$ eingetragen. Die Ausschläge $< 3 \text{ mm}$ sind, als von Stör- α -Teilchen herrührend, außer Betracht geblieben. Ihre Zahl ist unbedeutend gegenüber der der eingestrahnten α -Teilchen.

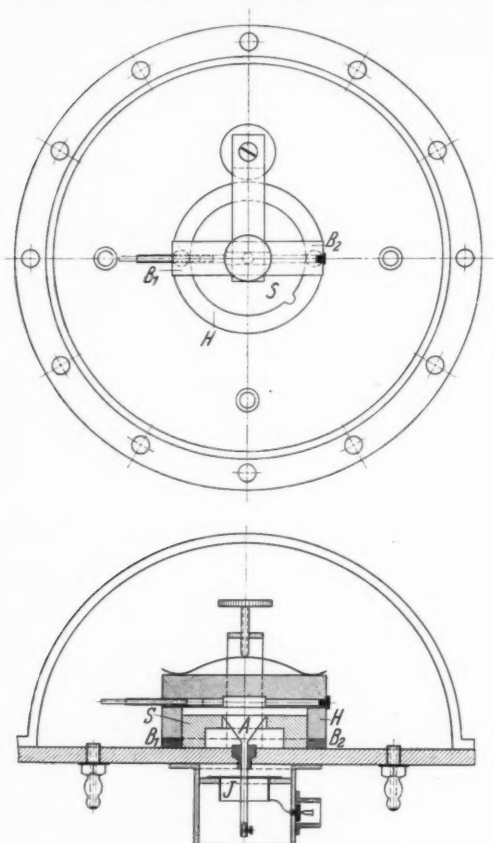


Abb. 7. Die Abbildung zeigt den Zipprichverstärker in Hauptschnitt und Aufsicht. Der Auffänger *A* — nicht geschnitten — wird vom Schutzring *S* umgeben, und ist durch einen Bernsteinisolator durch die Grundplatte geführt. Der Influenzring *I* ist unterhalb der Grundplatte angeordnet und mit einer Zuleitung nach rechts versehen. Zwei sorgfältig eben geschliffene und genau gleichstarke Bernsteinisolatoren in Scheibenform sorgen für den richtigen Abstand des vom Hartgummiring *H* getragenen Gitterblocks vom Auffänger. Der Gitterblock ist hier ohne das feinmaschige Drahtgitter gezeichnet und entspricht in seiner Anordnung ganz dem von Zipprich angegebenen. Ein Metallgalgen hinter dem Auffänger-Block-System sorgt für Zuleitung der Hochspannung über eine Rändelschraube und eine Blattfeder. In der Bohrung des Gitterblocks ist links der β -Präparatsträger mit Zylinder und Blende, rechts ein Bleistopfen eingeführt. Die Schlauchansätze dienen zum Evakuieren der Kammer. Der Übersichtlichkeit halber sind Verschraubungen und andere Einzelheiten der Befestigungstechnik weggelassen worden. Der Werkstoff für die Metallteile ist durchgehend Messing

Es wurden für drei Drahtstärken Meßreihen aufgenommen, wobei a verändert und die Ausschlagstatistik in der angegebenen Weise ausgewertet wurde. Die Kurven, die sämtlich beim Verstärkungsfaktor 1000 aufgenommen sind, bestätigen die Überlegung hinsichtlich des Durchgriffs und der Zunahme der Streuung bei wachsendem a (Abb. 6). Es zeigt sich, daß man mit dem kleinsten erreichten a noch nicht im Gebiet ist, wo der Durchgriff störend auftritt. Trotzdem wird die — gestrichelt angedeutete — Extrapolation nach sehr kleinem a qualitativ den Tatsachen entsprechen. Es ist nur eine Kurve für die drei verschiedenen Drahtdurchmesser $2r$ gezeichnet worden, da die Änderung der Streuung durch r im Rahmen der Genauigkeit der Auswertung nicht deutlich hervortrat.

Für Argon liegen die Verhältnisse analog¹⁾; die Kurve zeigt jedoch einen günstigeren Verlauf.

Abb. 7 zeigt den endgültigen Aufbau des Zipprichverstärkers und der Unterdruckkammer in Aufsicht und Hauptschnitt.

IV. Nachweis der β -Teilchen

Ein starkes β -Präparat wurde hergestellt, indem ein Platinstift in eine starke Lösung von Radium D (im Gleichgewicht mit seinen Folgeprodukten $Ra E$ und $Ra F$) getaucht und das hängende Flüssigkeitströpfchen verdampft wurde²⁾. Der Stift kam in einen Metallzylinder, dessen vordere Wand bis auf eine kleine Blende verschlossen war. Die Blende wurde mit einer Zellophanfolie von 0,0036 cm Dicke bedeckt, so daß die α -Strahlen des Po wie die β -Strahlen des $Ra D$ nicht in den Ionisationsraum gelangen konnten. Man hatte dort praktisch außer γ -Strahlung nur noch die β -Strahlen von $Ra E$. Da vorauszusehen war, daß β -Teilchen als Störteilchen in großer Zahl auftreten würden, mußten die definierten β -Teilchen des $Ra E$ auch eine hohe Frequenz haben. Durch Auszeichnen einer bestimmten Richtung im Raum (die Längsseite des Auffängers) konnten sie überdies von den die Kammer im allgemeinen in allen Richtungen durchsetzenden Stör- β -Teilchen durch größere Ausschläge am Oszillographen unterschieden werden³⁾. Auf Grund der Vorversuche mit den α -Teilchen wurde für alle Messungen mit β -Teilchen ein Gitter $2r = 0,02$, $a = 0,18$ mm verwendet. Man arbeitete mithin im Bereich kleinster Streuung.

1) Für eine lehrreiche Diskussion hierüber danke ich Herrn Dr. J. Schintlmeister, Wien, auch an dieser Stelle recht herzlich.

2) N. Riehl, Ztschr. f. Phys. 46. S. 490. 1928.

3) Auf die Möglichkeit, diese Auszeichnung in einer bestimmten Richtung fliegender β -Teilchen für die Behandlung einzelner Probleme der Höhenstrahlenforschung zu benutzen, möge hier hingewiesen werden.

Die α -Kanone wurde aus dem Gitterträger entfernt, der Zylinder mit dem β -Präparat eingeschoben, die Kammer mit Argon bis zum Druck 120 mm Hg gefüllt und durch Anlegen der Hochspannung der Stoßverstärkungsfaktor auf 1000 gebracht. Hatten sich konstante Bedingungen eingestellt, so erschienen jetzt zahlreiche Ausschläge, die etwa um den Faktor 5 bis 10 über dem Störspiegel des Röhrenverstärkers lagen. Ein α -Teilchen hätte bei maximaler Verstärkung unter diesen Bedingungen einen Ausschlag von etwa 5 m geben müssen. Tatsächlich beobachtete man alle 2 Min. einen Ausschlag, der den Lichtfleck des Oszillographen vollkommen von dem Schirm verschwinden ließ. Bei der großen Zahl der eingeschossenen β -Teilchen fiel dieser Effekt jedoch nicht störend ins Gewicht¹⁾. Daß es sich bei den photographierten Ausschlägen tatsächlich um β -Teilchen handelte, wurde geprüft, indem das Ra D-Präparat mit Zylinder, Blende und Verschußfolie einem β -empfindlichen Zählrohr genähert wurde. Die Anzahl der Zählimpulse wurde mit einem hochauflösenden Zählwerk über längere Zeiten gezählt. Es ergaben sich unter Berücksichtigung des Korrekturfaktors des Zählwerkes 15 Teilchen pro Sekunde, d. h. auf jede Kippschwingung durchschnittlich 1,5 Teilchen. Die Durchschnittsanzahl der pro Aufnahme erscheinenden Ra E- β -Teilchen ist auch tatsächlich so groß. Einzelne Aufnahmen aus den Serien zeigt Abb. 9. Man erkennt deutlich die Stör- β -Teilchen, die sich durch unregelmäßige kleine Ausschläge zu erkennen geben, ferner die größeren Ausschläge, die von den eingestrahlenen β -Teilchen des Ra E herrühren, und endlich einige α -Teilchen. Da stets mit 0,1 Sek. belichtet wurde und ein α -Teilchen im statistischen Mittel alle 2 Min. auftrat, war die Wahrscheinlichkeit, zufällig eines auf den Film zu bekommen, sehr gering.

Die einzelnen Bilder der Abb. 8 haben folgende Tatsachen gemeinsam:

1. Sie sind alle mit der Leica, Summar 1:2, mit dem Leitzverkleinerungsgerät 1:1,5 und voller Öffnung direkt vom Schirm der Oszillographenröhre auf Agfa-Isopan-Super-Spezialfilm von 21/10° DIN aufgenommen.

2. Der Lichtfleck wurde zeitproportional in der Abszisse abgelenkt. Dabei schrieb er eine starke Spur auf den fluoreszierenden Schirm. Die sehr schnellen Auslenkungen in der Vertikalen ergeben ein so schwaches Leuchten, daß sie

1) Natürlich gibt es außer diesen hochverstärkten auch noch α -Teilchen die so dicht über dem Auffänger dahinfliegen oder eine so kleine Strecke im Verstärkerfeld zurücklegen, daß die von ihnen hervorgerufenen Ausschläge von denen der hochverstärkten β -Teilchen beliebig wenig zu unterscheiden sind. Doch können auch sie nicht wesentlich zum Verwaschen der Statistik beitragen.

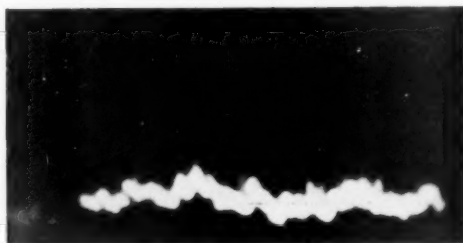


Abb. 8a. Das Bild zeigt die normale Nullfleckunruhe, wie sie durch das Verstärkerrauschen hervorgebracht wird

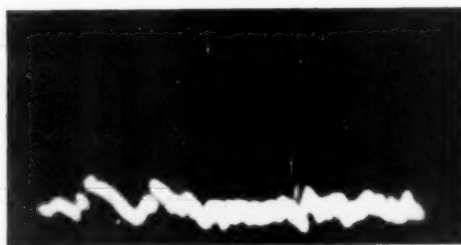


Abb. 8b. Hier treten neben der Unruhe durch das Verstärkerrauschen noch einige ganz kleine Ausschläge auf, die auf Stör- β -Teilchen zurückzuführen sind. Die Ausschläge sind von der Größenordnung der anderen Unruhe

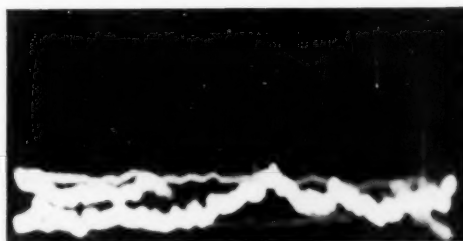


Abb. 8c. Noch einmal der Nulleffekt. Als der Lichtfleck ganz nach links hinüber gewandert war, hat sich der Verschuß geöffnet. Die Kippschwingung hat den Fleck einmal über den Schirm gezogen, der Verschuß hat sich darauf nicht, wie gewöhnlich, geschlossen, sondern tat es erst, nachdem der Lichtfleck zurückgelaufen war — die Feinheit der Spur rührt von der großen Geschwindigkeit her, mit der der „Rückstrahl“ läuft — und der Fleck dann links seine langsame Wanderung wieder begonnen hatte. Der Rückstrahl ist auch auf anderen Aufnahmen gelegentlich sichtbar

nur visuell beobachtbar sind. Die — langsame — Rückkehr des Strahles in die normale Horizontale ist bequem zu photographieren.

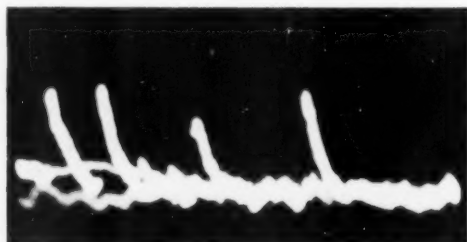


Abb. 8d. β -Teilchen des RaE. Die Aufnahmebedingungen sind die gleichen wie bei Abb. 8c

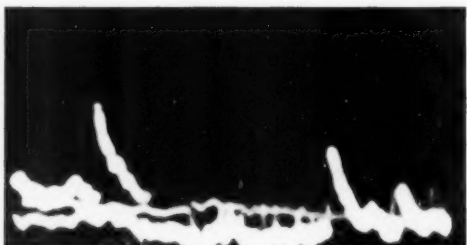


Abb. 8e. β -Teilchen des RaE. Rückstrahl und neues Einsetzen sind deutlich zu erkennen

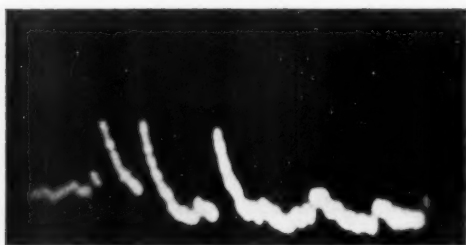


Abb. 8f. β -Teilchen des RaE

3. Gemessen wird die Ausschlagsgröße zwischen den Punkten des Abreißens und des Wiedereinsetzens des Strahles. Die Vergrößerung ist 2fach.

4. Ein gelegentliches Flackern des Strahles macht sich in Helligkeitsschwankungen bemerkbar, die in der Aufnahme auftreten. Verantwortlich

dafür ist die Oszillographenröhre, die anfängt, Alterungserscheinungen zu zeigen. Die Auswertung der Negative leidet darunter nicht, höchstens die Güte der Reproduktion.

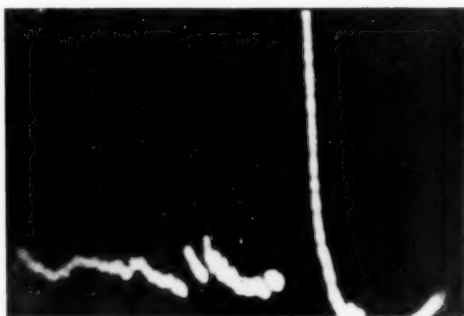


Abb. 8g. Ein Stör- α -Teilchen, das noch keine maximalen Verstärkungsbedingungen gefunden hat, jedoch den Lichtfleck schon weit über den Film auslenkt

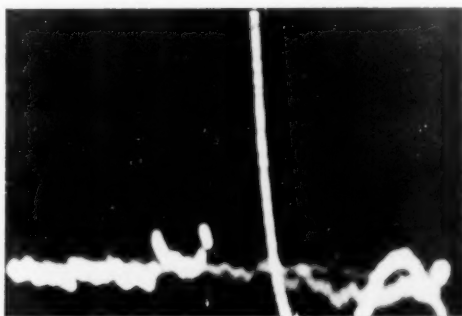


Abb. 8h. Ein Stör- α -Teilchen, dessen Ausschlag auch nicht mehr gemessen werden kann; eine Abschätzung führt auf eine Größe von einigen Metern

Wir wenden die integrale Methode der Auswertung der Filmstreifen nach S. 580 an, und erhalten die Treppenkurve *I* der Abb. 9; die ausgleichende Kurve *II* wird differenziert, wobei sich Kurve *III* ergibt, die die Ionenmengenverteilung im Verstärkerraum darstellt.

Um die Energieverteilung der β -Teilchen zu erhalten, müssen wir eine Umrechnung der der differentialen Ionisation proportionalen Ausschlagsgrößen k in Impulsgrößen $H\rho$ (ρ = Krümmungsradius im

Magnetfeld H) vornehmen. Die differentiale Ionisation der Elektronen steht in Beziehung zu ihrem Impuls; wir entnehmen den Gasentladungstabellen von Knoll, Ollendorff und Rompe¹⁾ für Argon,

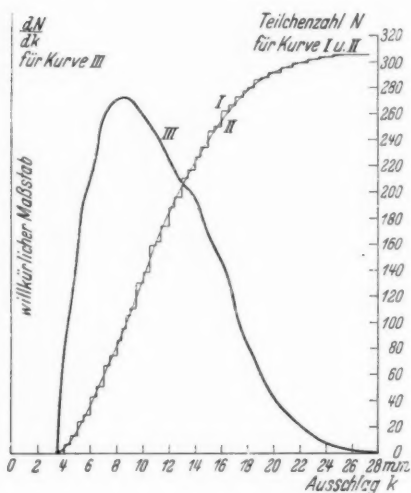


Abb. 9. Kurve I ergibt sich bei der Auswertung der Filmstreifen nach der integralen Methode. Kurve II stellt die Ausgleichskurve dar, Kurve III deren Differentialkurve, d. h. die Verteilung der Ionenmengen proportionalen Ausschlagsgrößen des Elektronenstrahls

120 mm Hg, folgende Werte der differentialen Ionisation in Abhängigkeit von Hq^2).

Tabelle 2

Abhängigkeit der differentialen Ionisation der β -Teilchen von ihrem Impuls Hq für Argon, 120 mm Hg und 2 cm Weg gerechnet

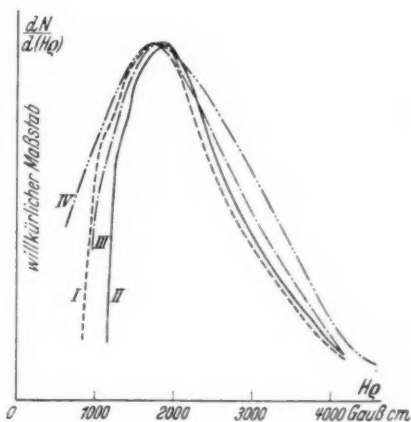
Hq (T cm)	Ionen/2 cm, 120 mm Hg
1000	30,0
1500	20,3
2000	14,3
2500	11,0
3000	9,0
3500	7,8
4000	7,1
4500	6,6
5000	6,2

1) M. Knoll, F. Ollendorff u. R. Rompe, Gasentladungstabellen, Berlin 1935.

2) Diese Beziehung könnte umgekehrt mittels der vorliegenden Apparatur geprüft werden, wenn man die Elektronen vor dem Eintritt in die Ionisationskammer ein veränderbares Magnetfeld H so durchlaufen ließe, daß ihr Krümmungsradius q vorgegeben wäre.

Mit dieser Transformation erhalten wir aus Kurve III, Abb. 9 die Kurve I, Abb. 10, die die Impulsverteilung der β -Teilchen im Verstärkerraum zeigt. Wir müssen noch den Energieverlust der Elektronen in der 0,0036 cm dicken, zwischen Ionisationskammer und Präparat geschalteten Zellophanfolie berücksichtigen, um die

Abb. 10. Nach Umrechnung der Ausschlagsgrößen-Ionenmengenverteilung — Kurve III Abb. 9 — auf Impulsgrößen der β -Teilchen ergibt sich Kurve I. Die Kurve II geht aus dieser durch Berücksichtigung des Impulsverlustes in der zwischen Verstärkerraum und Präparat geschalteten Folie hervor und stellt die Impulsverteilung vor dieser dar. Zum Vergleich sind die von Lyman und von Flammersfeld (III und IV) ausgemessenen Spektren des RaE eingezeichnet, wobei der Ordinatenmaßstab auf gleiche Höhe aller Maxima normiert ist



primäre Impulsverteilung der β -Teilchen des Präparates zu ermitteln. Der Energieverlust wurde berechnet, indem der Blochsche Ansatz

$$(10) \quad -\frac{dE}{dx} = 2\pi r_0^2 \cdot \frac{2m_0 c^2}{\beta^2} \cdot N \cdot \ln \left(\frac{2m_0 c^2 \beta^2}{13,5 \text{ Volt} \cdot Z} \right).$$

N = Zahl der Elektronen pro cm^3 ,

Z = Kernladungszahl,

r_0 = Elektronenradius,

m_0 = Elektronenmasse,

c = Lichtgeschwindigkeit,

β = Teilchengeschwindigkeit c .

über die Folie integriert wurde. Da diese einen unbekannten Prozentsatz Glycerin enthielt, wurde die Rechnung einmal für reines Zellophan und dann für reines Glycerin durchgeführt¹⁾, wobei sich die Werte der Tab. 3 ergaben. Ist die Energie vor der Folie E_0 , die dahinter E , so ist $E = E_0 - \Delta E$. In der Tabelle ist aus Bequemlichkeitsgründen die HQ -Darstellung gewählt.

1) Bei diesen Rechnungen unterstützte mich Herr Dr. F. Horst Müller in liebenswürdigster Weise.

Tabelle 3

$(H\varphi)_0$	$\Delta(H\varphi)$	
	Zellophan	Glyzerin
895	525	527
1104	377	378
1710	216	216
3000	173	173
4000	141	141
4670	125	125

Der Impulsverlust ist in Zellophan und Glyzerin mithin gleich; das Mischungsverhältnis beider Stoffe spielte also keine Rolle.

Mit dieser Korrektur ergibt sich nun die Impulsverteilung der β -Teilchen gemäß Kurve II der Abb. 10.

Zum Vergleich ist das β -Spektrum des RaE nach einer Arbeit von Lyman¹⁾ und das nach der neuesten vorliegenden Arbeit, der von Flammersfeld²⁾ eingezeichnet, indem der Ordinatenmaßstab beider Kurven so normiert wurde, daß die Maxima aller Kurven gleich hoch liegen. Dabei fällt auf, daß die Lage des Maximums gut übereinstimmt, die Verteilung insbesondere der langsamen β -Teilchen jedoch merklich variiert. Nun sollte die vorliegende Arbeit nicht eine neue, besonders genaue Ausmessung eines β -Spektrums erbringen, sondern nur zeigen, daß derartige Probleme überhaupt mit einer solchen Apparatur in Angriff genommen werden können. Daß die Impulsverteilung im Gebiet der langsamen Elektronen von denen der anderen Autoren abweicht, hat seinen Grund in der für Spektrenaufnahme ungünstigen Anordnung der β -Teilchenquelle und der relativ dicken Folie vor der Ionisationskammer. Da die Apparatur aber grundsätzlich in diesem Gebiet besonders günstig arbeitet, da sich in diesem die Ionenzahl mit variierender Energie sehr stark ändert, dürfte man bei Beachtung der erforderlichen Vorsichtsmaßregeln²⁾ in der Lage sein, mit ihr besonders genaue Messungen an den langsamen Teilchen eines β -Präparates zu machen.

Um quantitative Messungen am einzelnen β -Teilchen mit genügender Genauigkeit³⁾ vornehmen zu können, muß die Streuung

1) E. M. Lyman, Phys. Rev. **51**. S. 1. 1937.

2) A. Flammersfeld, Ztschr. f. Phys. **112**. S. 727. 1939.

3) Die von Tzschaschel (Ztschr. f. Phys. **111**. S. 215. 1938) geäußerten Bedenken hinsichtlich der großen Streuungen bei geringen Feldstärkeänderungen bestehen natürlich durchaus zu Recht. Seine Angabe, Ladungen unter 10^{-15} Coulomb würden durch Röhrenverstärker nicht mehr nachgewiesen, daher müßte der Stoßverstärkungsfaktor $>10^4$ sein, um ein einzelnes Elektron nach-

der Ausschlagsgrößen herabgesetzt werden. Sie rührt, wie weiter oben schon ausführlich diskutiert wurde, im wesentlichen von zwei Anteilen her:

1. Streuung durch Gittereinflüsse.
2. Streuung durch Einfluß der Schwankungen der Saugspannung und des Druckes, sowie Wirkung der nicht ganz ideal ausgeführten Ionisationskammer mit der Verstärkerstrecke.

Der Anteil 1. ist grundsätzlich nicht zu umgehen. Durch noch engere Gitter kann man nicht mehr viel gewinnen (vgl. Abb. 6).

Der Anteil 2. läßt sich jedoch ganz wesentlich verkleinern, wenn es gelingt, die zur Stoßverstärkung erforderliche Spannung auf $1\frac{0}{100}$ zu stabilisieren, was natürlich bei dem entsprechenden Aufwand immer möglich ist. Für diesen Fall sind die entsprechenden Spalten in Tab. 1 gerechnet. Auch dürfte die Verwendung von Tombakrohr den Druck auf 0,01 mm konstant zu halten gestatten.

V. Zusammenfassung

1. Ein kombinierter Verstärker zum Nachweis und zur Messung der von einzelnen β -Teilchen erzeugten Ionenmengen wird beschrieben. Er besteht aus einer Proportional-Stoßverstärkungsstrecke nach Zipprich und einem Röhrenproportionalverstärker (II).

2. Im Röhrenverstärker gelangen zwei Penthoden Philips 4696 als Verstärkerröhren zur Verwendung, der gesamte Rauschspiegel ergibt sich zu 3500 Ionen am Gitter der ersten Röhre. Die Registrierung der Ausschläge des Elektronenstrahls eines Oszillographen erfolgt photographisch (III A).

3. Die günstigsten Daten der Stoßverstärkungsstrecke zwischen einem die Spannung führenden Gitter und dem Auffänger werden diskutiert, und dabei aus genäherten Fehlerbetrachtungen geschlossen, daß man bei kleinen Abständen des Gitters vom Auffänger und entsprechend niedrigeren Spannungen fehlerfreier arbeitet. Der Druck in der Kammer darf anderer Überlegungen wegen 70 mm Hg nicht unterschreiten (III B 1).

4. Der Einfluß der Gitterdimensionen auf die Verstärkung wird untersucht. Eine „integrale Methode der Auswertung der Ausschlagsgrößen“ ermöglicht quantitative Aussagen über deren Streuung. Es

zuweisen, und die dann auftretenden Schwankungen machten Messungsergebnisse illusorisch, stimmt mit den hier gegebenen Resultaten überein. Da hier ein Elektron jedoch schon mindestens 6 Ionen primär erzeugt, braucht der Stoßverstärkungsfaktor nur 10^3 zu sein; man befindet sich in einem sehr viel günstigeren Gebiet, so daß quantitative Messungen doch möglich werden.

zeigt sich, daß die Streuung bei allzu engem wie allzu weitem Gitter zunimmt und im Minimum für Argon etwa 40% beträgt (III 1 2).

5. Durch Auszeichnen einer bestimmten Richtung (langgestreckter, schmaler Ionisationsraum) gelingt es, in dieser Richtung eingeschossene β -Teilchen von den die Kammer in allen Richtungen durchsetzenden Stör- β -Teilchen zu unterscheiden; letztere gehen praktisch in der Nullfleckunruhe unter, während die ersteren um den Faktor 3—10 darüber liegen. Die Gesamtempfindlichkeit der Apparatur ist 2 Ionen/mm Ausschlag. Aus der Ausschlagsgrößenverteilung wird die Impulsverteilung der β -Teilchen berechnet und das Ergebnis mit dem anderer Autoren verglichen. Es zeigt sich, daß die Lage des Maximums der Verteilung gut übereinstimmt, die Verteilung selber jedoch Abweichungen aufweist, für die eine plausible Erklärung gegeben wird. Die Anwendungsmöglichkeiten der Apparatur werden erwähnt (IV).

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. Hoffmann, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sein stetes Interesse am Fortgang der Versuche und für viele Ratschläge, die die Arbeit maßgeblich beeinflußt haben; Herrn Prof. Dr. R. Döpel für die Überlassung verschiedener Apparate der Abteilung für Radiophysik unseres Institutes, insbesondere des starken Th-Präparates zur Eichung des Verstärkers und der Zählrohrapparatur zur Kontrolle des β -Präparates.

Die Gesellschaft für Lindes Eismaschinen, Hüllriegelskreuth, stellte das Argon in lebenswürdiger Weise kostenlos zur Verfügung, wofür ihr auch hier gedankt sei.

Insbesondere aber gilt mein Dank den Kollegen und Arbeitskameraden unseres Institutes, die einen reichlichen Anteil am Gelingen dieser Arbeit haben, sei es durch anregende Diskussionen und Ratschläge, sei es durch sorgfältigste handwerkliche Arbeit.

Leipzig C 1, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 16. April 1940)

**Die Messung
von Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen
Von P. Vetterlein**

(Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Hannover)

(Mit 15 Abbildungen)

Inhalt: § 1. Meßmethode. — § 2. Apparat. — § 3. Versuchsergebnisse. — Zusammenfassung.

§ 1. Meßmethode

In einer früheren Arbeit habe ich eine von H. Bartels angegebene Methode zur Messung elektrischer Anregungsfunktionen experimentell entwickelt¹⁾. Durch elektrisches Differenzieren von Gegenspannungskurven wurden unmittelbar Geschwindigkeitsverteilungskurven gewonnen. Das Grundsätzliche der Methode ist im § 2 der genannten Arbeit eingehend beschrieben, so daß ich auf eine Wiederholung verzichten kann. Es sei nur noch einmal kurz betont, daß die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion eines Elektronenstrahls als Funktion einer Spannung (nämlich der Gegenspannung) dargestellt wird.

Der technische Vorgang einer Messung bestand darin, daß die Gegenspannung durch langsames Verändern des Potentiometers P_4 (vgl. Abb. 8 der genannten Arbeit) variiert werden konnte, und zu jedem Gegenspannungswert der Ausschlag des Ausgangsinstruments abgelesen wurde. Wenngleich durch die Meßmethode, die es gestattet, mit relativ groben Instrumenten zu arbeiten, eine Meßreihe im Gegensatz zu anderen Methoden in sehr kurzer Zeit aufgenommen werden konnte, so versagt doch auch diese Methode, wenn es gilt, einmalige Vorgänge oder Vorgänge großer Inkonstanz aufzunehmen. Ich habe deshalb eine Erweiterung vorgenommen mit dem Ziel, die Geschwindigkeitsverteilungskurve unmittelbar und trägheitsfrei dauernd beobachten und photographieren zu können.

Der Gedankengang, der diese Registrierung ermöglichte, war folgender (vgl. Abb. 1, schematisches Schaltbild):

An Stelle der Variation der Gegenspannung von Hand durch Verändern des Potentiometers P_4 tritt eine durch irgendeinen Generator erzeugte Wechselspannung ΔV_1 . Eine dieser Wechsel-

1) P. Vetterlein, Ann. d. Phys. [5] **35**, S. 251. 1939.

spannung proportionale Spannung wird an die *waagerechten* Ablenkplatten einer Braunschen Röhre gelegt. Proportional der Gegen-
spannung wird also der Strahl der Braunschen Röhre abgelenkt, und jeder Ablenkung entspricht eine ganz bestimmte Gegenspannung.

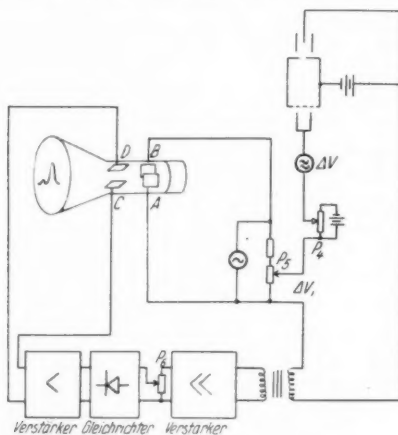


Abb. 1. Schematisches Schaltbild

An Stelle des Ausgangsinstruments wird ein Gleichrichter geschaltet und die entstehende Gleichspannung an die *senkrechten* Platten der Braunschen Röhre gelegt. Jeder Ablenkung des Strahls in senkrechter Richtung entspricht also eine bestimmte, durch den Verstärker gegangene Wechselspannungsamplitude (und damit Anzahl Elektronen bei der betreffenden Geschwindigkeit).

Wählt man die Frequenz von ΔV_1 zu etwa 20 Hz, so wird also 20mal in der Sekunde die Geschwindigkeitsverteilungskurve „durchfahren“, und auf dem Leuchtschirm der Braunschen Röhre erscheint das nahezu flimmerfreie Bild derselben in rechtwinkligen Koordinaten.

§ 2. Apparatur

Die Wechselspannung ΔV_1 wird in dem Kippschwingungserzeuger, dessen Schaltbild in Abb. 2 gezeigt wird, erzeugt. Die Form der Wechselspannungskurve ist an sich ja belanglos, es hat sich jedoch als bestes erwiesen, eine zeitproportionale Ablenkung des Elektronenstrahls der Braunschen Röhre vorzunehmen, da dann die photographischen Aufnahmen am gleichmäßigsten ausfallen. In dem üblichen Glühlampenkreis werden Kippschwingungen kleiner Amplitude (etwa 20 Volt) erzeugt, von denen über einen

Spannungsteiler ein Teil (etwa 5 Volt) die nachfolgende Verstärkerröhre (AL 4) aussteuert. Im Anodenkreis befinden sich 10 Widerstände von je 1 kOhm in Reihe, an deren Enden die Ablenkspannung für die Braunsche Röhre, wahlweise an einem oder mehreren der-

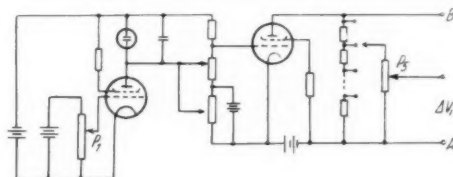


Abb. 2. Kippschwingungsgenerator

selben die Wechselspannung ΔV_1 abgenommen wird. Durch das Potentiometer P_1 wird die Frequenz der Kippschwingung eingestellt, P_2 dient zur Feineinstellung der Amplitude von ΔV_1 , gestattet also die Kurve mehr oder weniger auseinander zu ziehen.

Die Schaltung des Gleichrichters zur senkrechten Ablenkung des Elektronenstrahls der Braunschen Röhre zeigt die Abb. 3. Als Röhre fand die ABC 1 Verwendung, da die gleichgerichtete Spannung nicht zur genügenden Ablenkung des Strahls ausreichte und noch einmal verstärkt werden mußte. Trägheitserscheinungen des Gleichrichters mußten sorgfältig vermieden werden, da sie eine Verzerrung der Geschwindigkeitsverteilungskurven zur Folge gehabt hätten. Daß tatsächlich keine Verzerrungen auftraten, wurde durch photographische Aufnahmen mit Ablenkfrequenzen von 1 und 20 Hz kontrolliert. Die erhaltenen Kurven deckten sich vollständig.

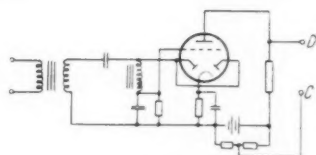


Abb. 3. Gleichrichter

Durch das Potentiometer P_4 (vgl. Abb. 1) läßt sich jeder gewünschte Teil der Geschwindigkeitsverteilungskurve in die Mitte des Schirms der Braunschen Röhre einstellen. Dieser Teil kann durch das Potentiometer P_5 beliebig auseinander gezogen werden. Das Potentiometer P_4 dient aber auch gleichzeitig zur Eichung der Spannungsachse. Beim Durchdrehen von P_4 wandert die Kurve, wie man an einem charakteristischen Teil derselben, z. B. dem Nullmaximum, feststellen kann, über den Schirm der Braunschen Röhre. Man macht nun auf einem Film mehrere Aufnahmen, wobei die Spannung an P_4 meßbar verändert wird, und kann auf diese Weise leicht die Abszissenachse mit einer Spannungseinteilung versehen.

Durch das Potentiometer P_6 wird die Verstärkungsziffer in weiten Grenzen geändert. Das Nullmaximum überragt die Verlustmaxima um eine Größenordnung. Man kann nun aber leicht mit kleiner Verstärkungsziffer eine Gesamtaufnahme der Geschwindigkeitsverteilungskurve machen und dann einzelne Maxima durch Bedienung von P_4 und P_5 in der Mitte des Bildschirms einstellen und durch größere Verstärkung deutlicher aufnehmen.

§ 3. Versuchsergebnisse

Im folgenden gebe ich einige vorläufige Versuchsergebnisse, die das Arbeiten der neuen Methode zeigen sollen. Daß die erhaltenen Maxima nicht sehr schmal sind, liegt an der Stoßapparatur, die kein allzu großes Auflösungsvermögen besitzt. Es kam bei diesen Aufnahmen aber auch nur darauf an, zunächst einmal die elektrische Methode auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen.

Abb. 4 zeigt eine Geschwindigkeitsverteilungskurve von Elektronen im Quecksilberdampf. Die Versuchsbedingungen waren ähnlich, wie bei den in meiner früheren Arbeit gezeigten Kurven. Ich bitte deshalb, alles Nähere dort nachlesen zu wollen. In Abb. 5 ist allein das Verlustgebiet auf der Braunschen Röhre eingestellt. Man erkennt in den Einzelheiten deutlich die gute Übereinstimmung mit den früher gemessenen Kurven. Die Belichtungszeit der Aufnahme betrug $\frac{1}{10}$ Sek.

Abb. 6—9 zeigen 4 Aufnahmen, die in je 10 Sek. Abstand gemacht wurden. Die Aufnahmen sollen die gute Registrierfähigkeit der Anlage zeigen. Nachdem die Stoßapparatur etwa 3 Wochen, ohne ausgepumpt zu sein, dastand, wurde Aufnahme 6 gemacht. Sie zeigt ein Verlustmaximum bei 14 Volt, das dem eingedrungenen Stickstoff zuzuordnen ist. Nachdem die Aufnahme 6 gemacht worden war, wurde die Pumpe an die Apparatur angeschlossen. Der Stickstoff wurde abgepumpt, das Maximum verschwindet, gleichzeitig tritt durch den Hg-Dampf das Verlustmaximum bei 6,7 Volt scharf hervor. Nach etwa 30 Sek. ist die Apparatur völlig ausgepumpt.

Bei den Aufnahmen 10—14 wurde eine ganz geringe Menge Kadmium in der Apparatur verdampft unter gleichzeitigem Ausfrieren des Hg-Dampfes. Man erkennt deutlich das Anwachsen des Verlustmaximums bei 5,4 Volt, das dem Verlustmaximum bei 6,7 Volt bei Hg (Anregung von 2^1P) entspricht. Nach Verdampfen der eingebrachten Substanzmenge geht das Cd-Maximum zurück, aber gleichzeitig wächst das Hg-Maximum bei 6,7 Volt, da sich durch Heizen des Ofens der Hg-Dampfdruck langsam erhöht.

Geschwindigkeitsverteilungskurven

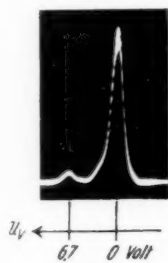


Abb. 4.
Hg-Dampf

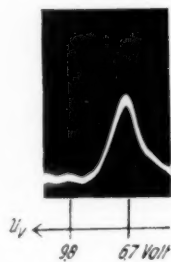


Abb. 5.
Hg-Dampf

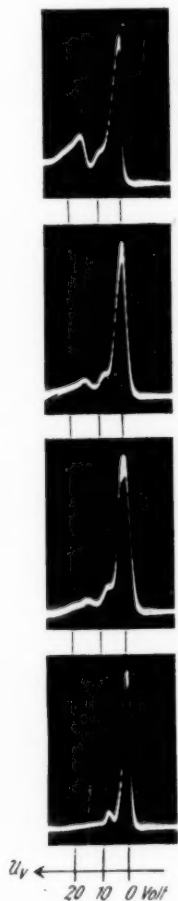


Abb. 6—9.
Auspumpen
der Apparatur

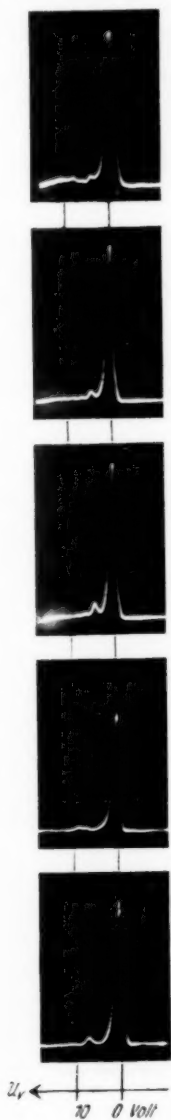


Abb. 10—14.
Verdampfen einer
geringen Menge
Kadmium

Das Verdampfen der Substanz erfolgte mit dem in Abb. 15 gezeigten Ofen. Über ein Steatitrohr, das zwei Durchbohrungen hat, ist ein Eisenzylinder geschoben, der vorne eine Öffnung zur Aufnahme der Substanz hat. Die Heizung erfolgt durch eine Platindrachtspirale im Inneren des Steatitrohres. Die Stromzuführung erfolgt in gleicher Weise wie bei der Kathode durch zwei kleine

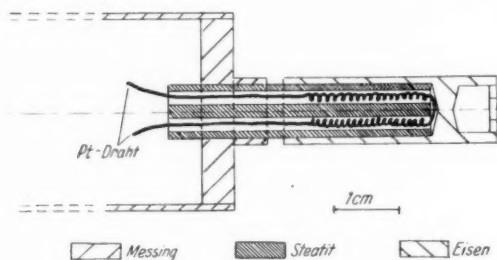


Abb. 15. Ofen

Stecker und Buchsen. Der Ofen ist mit einem Messingrohr verschraubt, das wie bei der Kathode durch einen Schliff mit der Apparatur verbunden wird (vgl. frühere Arbeit, Abb. 5). Die Bauart des Ofens hat den Vorteil, daß Verkittungen völlig vermieden sind.

Ausgewertet zur Bestimmung von Anregungsfunktionen wurden die Aufnahmen noch nicht. Sie sollen lediglich als Beispiele dienen, die zeigen, daß es tatsächlich möglich ist, Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen unmittelbar zu beobachten und im Bruchteil einer Sekunde aufzunehmen.

Zusammenfassung

Im Anschluß an eine früher mitgeteilte Methode zur Messung von Anregungsfunktionen wird eine Erweiterung mitgeteilt, durch die es möglich ist, die Geschwindigkeitsverteilungskurven unmittelbar in rechtwinkligen Koordinaten sichtbar zu machen und in sehr kurzer Zeit aufzunehmen. Es werden einige Beispiele gezeigt.

Diese Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Hannover ausgeführt. Herrn Prof. Dr. H. Bartels danke ich für manche Ratschläge und wertvolle Hinweise.

Hannover, An der Tiefenriede 24.

(Eingegangen 9. April 1940)

**Optische Untersuchungen
in einem speziellen inhomogenen Medium*)**

Von E. v. Heydebrand und der Lasa

(Mit 7 Abbildungen)

Inhalt: 1. Einleitung. — 2. Historische Übersicht. — 3. Lichtquelle im Medium. — 4. Lichtquelle außerhalb des Mediums. — 5. Literaturverzeichnis.

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Lichtausbreitung in einem isotropen Medium, dessen Brechungszahl

- a) in parallelen Ebenen konstant ist und
- b) ein lineares Änderungsgesetz befolgt.

Dabei werden nur Fragen in Betracht gezogen, die sich aus den Grundannahmen der geometrischen Optik beantworten lassen. Als hauptsächliche Ergebnisse erscheinen die Gesetze der Strahlen und ihrer Wellenflächen, deren zeichnerische Darstellung für verschiedene Orte der Lichtquelle sowie Aussagen über die von ihr erzeugte Beleuchtung.

Obwohl die Annahmen a) und b) so naheliegend wie möglich sind, indem sie die einfachste Gestalt der Flächen gleicher Brechungszahl und die einfachste Gesetzmäßigkeit in der Änderung der Brechungszahl zugrunde legen, sind sie noch nie gleichzeitig zur Grundlage einer Untersuchung gemacht worden. Dies mag seinen Grund darin haben, daß die mathematische Behandlung gerade hier umständlicher ist als in der Mehrzahl der bisher untersuchten Fälle**).

Unter anderen Annahmen ist das Problem schon häufig behandelt worden. Man hat es meist mit sphärischer Schichtung des inhomogenen Mediums und nichtlinearer Natur des Änderungsgesetzes der Brechungszahl zu tun. Im folgenden Abschnitt werde ich die mir bekannt gewordenen Arbeiten anführen, die zu einer expliziten Darstellung des Strahlenverlaufs in isotropen inhomogenen

*) D 83 (Auszug).

**) Z. B. machen die Figuren Näherungslösungen transzendenter Gleichungen notwendig.

Medien gelangen. Sie enthalten zahlreiche Beispiele zentralsymmetrischer und eindimensionaler Abhängigkeit der Brechungsahl, lassen aber den planparallel-linearen Fall vermissen. Diese offensichtliche Lücke soll durch die vorliegende Arbeit beseitigt werden.

Als Grundlage für unsere Untersuchung würde sich das Fermatsche Prinzip $\delta \int n ds = 0$ zusammen mit den Axiomen der Isolierbarkeit und Umkehrbarkeit der Strahlen eignen. Hiervon geht auch die Mehrzahl der früheren Arbeiten aus. Wir stellen dagegen einen Ansatz an den Anfang, dessen Identität mit dem Fermatschen Prinzip sich beweisen läßt¹⁾, dessen Herleitung aus der Grundgleichung der Wellenoptik jedoch zu der Forderung führt, daß die Wellenfronten groß gegen die Wellenlänge sein müssen, also keine Beugung auftritt. Dann sind die obigen Axiome von selbst erfüllt. Gleichzeitig schließt die Herleitung dieses Ansatzes, für die wir auf Sommerfeld und Runge²⁾ verweisen, Brennpunkte, -linien und -flächen aus seinem Gültigkeitsbereich aus. So kommt z. B. dem unendlichen Wert der Beleuchtung, den wir längs der Umhüllenden des Strahlenraumes finden werden, keine physikalische Bedeutung zu. Unser Ansatz lautet:

$$(1) \quad n \mathfrak{E} = \text{grad } E,$$

worin \mathfrak{E} den Tangenteneinheitsvektor der Lichtstrahlen und n die nur vom Ort, nicht von der Richtung abhängige Brechungsahl bedeutet. In Worten besagt (1), daß die Lichtstrahlen als orthogonale Trajektorien der Flächenschar $E = \text{const}$ darstellbar sind. Die Bedeutung von E ergibt sich durch Umkehrung von (1). Das vermöge $\text{rot } n \mathfrak{E} = 0$ vom Wege unabhängige Integral

$$E - E_0 = \int_{P_0}^P n \mathfrak{E} d\tau$$

ist nämlich nichts anderes als der (optisch gemessene) Lichtweg, auch Eikonal genannt, zwischen den Punkten P_0 P ; die Flächen

$$E - E_0 = \int_{P_0}^P n ds = \text{const}$$

bezeichnet man bekanntlich als Wellenflächen.

Aus der Beziehung (1) wollen wir nun einige interessante (obgleich nicht neue) Tatsachen des geometrischen Strahlenverlaufs ableiten.

Sind \mathfrak{a} , \mathfrak{b} zwei beliebige Vektoren, so lehrt die Vektoranalysis, daß

$$\text{grad}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \nabla \cdot \mathfrak{b} + [\mathfrak{a} \text{ rot } \mathfrak{b}] + \mathfrak{b} \nabla \cdot \mathfrak{a} + [\mathfrak{b} \text{ rot } \mathfrak{a}].$$

Für den Einheitsvektor \mathfrak{S} gilt demzufolge

$$\text{grad } \mathfrak{S}^2 = 2(\mathfrak{S} \nabla \cdot \mathfrak{S} + [\mathfrak{S} \text{ rot } \mathfrak{S}]) = 0.$$

Setzen wir in der ersten Formel $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{b} = n \mathfrak{S}$, ($\text{rot } \mathfrak{b} = 0$), so erhalten wir die vektorielle Differentialgleichung

$$(2) \quad \text{grad } n = \mathfrak{S} \nabla \cdot n \mathfrak{S},$$

deren Komponenten

$$d\left(n \frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x} ds,$$

$$d\left(n \frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial y} ds,$$

$$d\left(n \frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z} ds$$

als Kummersche Differentialgleichungen der Lichtausbreitung bekannt sind*)⁴⁾. In der Identität

$$\mathfrak{S} \nabla \cdot n \mathfrak{S} = n \mathfrak{S} \nabla \cdot \mathfrak{S} + \mathfrak{S} (\mathfrak{S} \nabla) n$$

läßt sich weiterhin die Richtungsableitung des Tangenteneinheitsvektors durch den in Richtung der Strahlhauptnormalen \mathfrak{N} weisenden Krümmungsvektor ersetzen:

$$\mathfrak{S} \nabla \cdot \mathfrak{S} = \frac{d\mathfrak{S}}{ds} = \frac{1}{r} \mathfrak{N}.$$

Damit erhält (2) die Form

$$\frac{1}{r} n \mathfrak{N} + \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S} \text{ grad } n = \text{grad } n.$$

Man sieht daraus, daß die Vektoren \mathfrak{N} , \mathfrak{S} und $\text{grad } n$ komplanar sind, mit anderen Worten, daß die Schmiegungebenen eines Lichtstrahles die Flächen gleicher Brechungszahl senkrecht durchsetzen. Multiplizieren wir mit $r \mathfrak{N}$, so lesen wir aus

$$r \mathfrak{N} \text{ grad } n = n$$

ab, daß die Krümmungsmittelpunkte aller durch einen Punkt gehenden Strahlen auf einer Ebene liegen, die von ihm den Abstand $n:|\text{grad } n|$ hat und zu $\text{grad } n$ senkrecht ist. Dividieren wir die letzte Gleichung mit $r n$, so erscheint die übliche Form

$$(3) \quad \frac{1}{r} = \mathfrak{N} \frac{\text{grad } n}{n}$$

des zuerst von Heath⁵⁾ angegebenen allgemeinen Gesetzes, welches

*) R. Straubel⁵⁾ weist darauf hin, daß W. R. Hamilton bereits drei Jahrzehnte früher entsprechende Gleichungen aufstellte, die sogar einer Richtungsabhängigkeit der Brechungszahl Rechnung trugen.

lautet: „Die Krümmung der Lichtstrahlen in isotropen Medien ist gleich der relativen Änderung der Brechungszahl in Richtung der Strahlhauptnormalen.“

2. Historische Übersicht

Nachdem Huyghens bereits im Jahre 1678 in seiner Schrift „*Traité de la lumière*“ S. 44 die Krümmung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre beschrieben und den Verlauf der von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehenden Strahlen und Wellenflächen skizziert hatte, stellte als erster J. Bernoulli 1696 für ein planparallel geschichtetes Medium die Differentialgleichung der Lichtstrahlen auf, die er einer Äußerung Fermats in einem Briefe an De la Chambre gemäß als Brachistochronen ansah, und warf auch schon die Frage nach deren orthogonalen Trajektorien auf. Die erste exakte Abbildung der Lichtausbreitung in einem inhomogenen Medium findet sich erst ein Jahrhundert später in einer Abhandlung von Biot⁶⁾, und zwar stellt sie den Fall dar, daß die Lichtquelle in einem planparallel geschichteten Medium liegt, dessen Brechungszahl das Gesetz $n^2 = n_0^2 + ay$ befolgt. Die Strahlbahnen und ihre Umhüllende sind hier Parabeln, die Kurve der Scheitel ist eine Ellipse. Über die Gestalt der Wellenflächen in diesem Falle vgl. die Arbeiten von Garbasso¹⁰⁾ und Ciani⁷⁾. Die Anregung zu der zitierten Arbeit hatte Biot durch die damals eifrig betriebenen Beobachtungen der Luftspiegelung (Monge, Wollaston) empfangen, auf deren mathematische Erklärung es ihm ankam. Auch sein Zeitgenosse Laplace entfernte sich in seiner „*Mécanique celeste*“ t. 4, Paris 1805) nicht vom Boden der Anwendung auf astronomische und terrestrische Refraktion, deren Kennzeichen eine nur schwache Änderung des Brechungsindex ist. Erst Kummer überwand die Hemmungen, die bisher einer Erweiterung der Theorie auf starkes Gefälle der Brechungszahl entgegenstanden. Er sagt in seinem vielgenannten Akademiebericht⁸⁾: „Die atmosphärische Strahlenbrechung ist bisher fast ausschließlich nur unter Zugrundelegung der Größenverhältnisse, welche für unsere Erde zufällig statthaben, für den praktischen Gebrauch der Astronomie und Geodäsie bearbeitet worden. Man hat darum eine Reihe sehr interessanter Erscheinungen, welche diese Theorie darbietet, wenn sie von einem *allgemeineren, mehr mathematischen* Gesichtspunkte aus betrachtet wird, wie es scheint, bisher ganz unbeachtet gelassen.“

Auf seine interessanten Ergebnisse über die optischen Verhältnisse in den Atmosphären der Himmelskörper, die er in zwei Klassen einteilt, sei hier nur hingewiesen. Seitdem hat es nicht an Problemen gefehlt, die den Physiker dazu einluden, sich mit krumm-

linigen Lichtstrahlen zu beschäftigen. Hierher gehört die Vertiefung der Kummerschen Theorie durch A. Schmidt⁸⁾ und ihre Anwendung auf die Physik der Sonne — bis heute gibt es keine bessere Erklärung für die Schärfe ihres Randes — hierher gehört die durch Exner und Matthiessen⁹⁾ entwickelte ophthalmologische Dioptrik und Wieners¹⁰⁾ Untersuchungen von Wärmeleitung und Diffusion, ferner die geometrische Elektronenoptik, deren Elektronenbahnen an die Stelle der Lichtstrahlen, und deren Potentialflächen an die Stelle der Indizialflächen treten.

Aber neben alledem blieb auch das von Kummer geforderte allgemeine Interesse an der Durchforschung der Lichtausbreitung in beliebig geschichteten Medien rege. Da die vorliegende Arbeit dem Bedürfnis entspringt, die Reihe der in dieser Richtung angestellten Untersuchungen zu ergänzen, geben wir deren Ergebnisse in folgendem kurz wieder.

Es würde zu weit führen, alle Quellen zu berücksichtigen, deren theoretischer Inhalt durch irgendwelche Anwendungsbeispiele erläutert wird. In den zu referierenden Arbeiten von Matthiessen, Dircks, Wierz, Garbasso kommt es mehr auf die Einzelfälle selbst an.

Die zahlreichen Arbeiten von Matthiessen sind bei Wierz⁹⁾ zitiert. Wir erwähnen nur drei, die in den Rahmen unserer Darstellung gehören. — Es ist aus der Ophthalmologie her bekannt, daß die Augenlinsen der Lebewesen mehr oder weniger starke Schwankungen der Brechungszahl aufweisen. Einen besonderen Fall stellt die *sphärische* Schichtung der Linsen dar, wo die Flächen gleicher Brechungszahl konzentrische Kugeln sind. Über ein merkwürdiges optisches Problem, das unter dem Namen „Maxwellsches Fischauge“ bekannt ist, berichtet Matthiessen¹²⁾. Er führt aus der Originalarbeit von Maxwell das Folgende an: „Ein durchsichtiges Medium ist so beschaffen, daß der Weg eines Lichtstrahles in demselben ein Kreis ist und der Brechungsindex eine Funktion des Abstandes von einem gegebenen Punkte in der Kreisebene. Es soll die Funktion gesucht und gezeigt werden, daß

1. der Weg des Strahles in diesem Medium ein Kreis ist und
2. daß alle Strahlen, welche von irgendeinem Punkte des Mediums ausgehen, sich genau in einem anderen Punkte des Mediums treffen.“

Das Ergebnis ist, daß der Brechungsindex zu der Summe $\text{const} + r^2$ umgekehrt proportional sein muß. Durch ein solches

⁹⁾ Vgl. M. Wierz⁹⁾.

(unbegrenzt gedachtes) Medium wird eine scharfe Abbildung des Raumes bewirkt, weil 2. erfüllt ist.

Übrigens ist 2. eine bloße Folge der Annahme, daß alle durch einen Punkt gehenden Strahlen Kreise sind. Es gilt nämlich in jedem isotropen Medium der für kreisförmige Schichtung schon von Grunert¹¹⁾ bewiesene Satz, daß die Krümmungsmittelpunkte aller durch einen Punkt P gehenden Strahlen auf einer Ebene ε liegen; da nun jene mit den Mittelpunkten der Strahlenkreise identisch sind, schneiden sich die Strahlen auch in einem zu P bezüglich ε spiegelbildlichen Punkte P' .

Eine spätere Arbeit von Matthiessen¹²⁾, behandelt die „Phoronomie der Lichtstrahlen usw.“ Es wird darin das von Laplace stammende Brechungsgesetz für sphärische Schichtung (auch nach dem Verfahren von Bessel) abgeleitet und in die Gestalt einer Differentialgleichung in Polarkoordinaten gebracht, nämlich

$$\frac{dr}{d\vartheta} = r \left[\frac{r^2}{g^2} f^2(r) - 1 \right]^{1/2},$$

worin $g = N_1 r_1 \sin \tau_0$ durch die Anfangswerte bestimmt ist. Dann wird, der üblichen Fragestellung entgegen, die Gestalt der Trajektorien vorgegeben und daraus das zu fordernde Änderungsgesetz des Brechungsindex bestimmt. Durchführung für die Cardioide und die drei Kegelschnitte. Sodann werden aus den Indizialkurven

$$\begin{array}{ll} 1. & n = b r, \\ 2. & n = \frac{b}{r}, \\ 3. & n = \frac{b}{r^m + 1}, \\ 4. & n = \frac{\sqrt{b^2 + r^2}}{r}, \\ 5. & n = \frac{g}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \\ 6. & n = \frac{g \sqrt{2ar - r^2}}{br} \end{array}$$

die Trajektorien abgeleitet. Sie besitzen in Polarkoordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} 1. & r^2 = \frac{g}{b \cos 2\vartheta}, \\ 2. & r = e^{\vartheta} \sqrt{\frac{b^2}{g^2} - 1} \quad (\text{logar. Spirale}), \\ 3. & r^m = \frac{b}{g} \sin m\vartheta, \\ 4. & r = \frac{g}{\vartheta} \quad (\text{hyperbol. Spirale})^{**), \\ 5. & \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \arctg \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} = \vartheta - \vartheta_0 \quad (\text{Epizykloide}), \\ 6. & (b^2 - ar)(r \sqrt{a^2 - b^2})^{-1} = \cos \vartheta \quad (\text{falls für } r_{\min}: \vartheta = 0: \text{Ellipse}). \end{array}$$

*) Für $m = 2$ wird daraus eine Lemniskate.

**) Geht aus $y = \sqrt{g^2 - c^2} \sin \left(\vartheta \sqrt{1 - \frac{c^2}{g^2}} \right)$ hervor, wenn $g = c$.

Für *Parallelschichtung* werden nur zwei Beispiele gegeben, nämlich

$$1. \quad n = N_1 \sin \tau_0 \sqrt{\frac{2a}{y}}$$

und

$$2. \quad n = N_1 \sin \tau_0 \sqrt{1 + a^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos^2 2\pi \frac{x}{\lambda}},$$

deren Trajektorien

$$1. \quad x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \quad (\text{Zykloide})$$

und

$$2. \quad y = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (\text{Sinoide})$$

lauten. Am Schluß der Arbeit werden Refraktionstheorien behandelt, wobei größere Abweichungen der Lichtstrahlen von der Geradlinigkeit nicht vorkommen.

In einer dritten Arbeit: „Beiträge zur Theorie der geschweiften Strahlenbündel und ihrer Wellenflächen“ gibt Matthiessen¹⁴⁾ die historische Abhandlung von Bernoulli wieder und behandelt im weiteren das Beispiel sphärischer Schichtung

$$n = \frac{r^2}{a^2},$$

dessen Strahlkurven die Gleichung

$$r^3 \sin(\tau_0 - 3\vartheta) = R^3 \sin \tau_0$$

haben, worin für $\vartheta = 0$ der Radiusvektor $r = R$ ist und τ_0 beliebige Werte annehmen kann. Es sind hyperbelähnliche Linien, welche zwei zu $\vartheta = 0$ symmetrische Asymptoten und gegen das Zentrum gerichtete Scheitel besitzen. Ihre Isogonalscharen werden durch eine Differentialgleichung dargestellt, deren Spezialisierung die Wellenlinien liefert. Die Integration wird unter Benutzung verschiedener Koordinatensysteme durchgeführt und zum Schluß der Lichtweg zur Definition der Wellenlinien herangezogen.

Die Dissertation von Dircks¹⁵⁾ vervollständigt die Kenntnis der allgemeinen Gesetze der Lichtausbreitung durch weitere praktische Beispiele. Im Anschluß an Matthiessen wird im ersten Teil die Frage nach dem Änderungsgesetz des Brechungsindex aufgeworfen, wenn die Trajektorien in Gestalt der „wichtigsten historischen Kurven“ vorgegeben sind. Wir stellen die Beispiele in abgekürzter Form zusammen. Wieder ist $g = N_1 r_1 \sin \tau_0$ eine durch die Anfangswerte gegebene Größe. a, b, p, m sind Konstanten.

Die vier ersten der gegebenen Beispiele erklären sich durch das fünfte:

$$r = a \vartheta^m \text{ (allgemeine Spirale),}$$

$$n = g \frac{\sqrt{\frac{2}{r^m} + m^2 a^{\frac{2}{m}}}}{1 + \frac{1}{m}}.$$

Das sechste legt die Pascalsche Schnecke als Trajektorie zugrunde:

$$r = a + b \cos \vartheta, \quad n = \frac{g \sqrt{b^2 - a^2 + 2ar}}{r^2}.$$

Es folgen Beispiele unter Benutzung kartesischer Koordinaten*):

$$y^2 = 2p x + p^2 \text{ (Parabel),} \quad n = \frac{-2g}{\sqrt{y^2 + p^2}},$$

$$y^2 = \frac{8x^3}{27p} \text{ (semikubische Parabel),} \quad n = \frac{3g \sqrt[3]{p + 2x}}{x \sqrt[3]{2x}},$$

$$y = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right] \text{ (Kettenlinie),} \quad n = g \left(e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right) \left[e^{\frac{2x}{a}} (x-a) - (x+a) \right]^{-1}$$

und solche in Parameterform:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \text{ (Astroide),} \quad n = \frac{g}{a \sin t \cos t}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\cos t + t \sin t) \\ y &= a(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\} \text{ (Kreisevolvente),} \quad n = \frac{g}{at},$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a(m \cos t - \cos mt) \\ y &= a(m \sin t - \sin mt) \end{aligned} \right\} \text{ (Epizykloide),} \quad n = g \left[a(m+1) \sin \left(\frac{m-1}{2} t \right) \right]^{-1}.$$

Für die Umkehrung der Aufgabe bietet Dircks keine bemerkenswerten Beispiele.

Die Dissertation von Wierz⁹⁾ enthält für alle gegebenen Beispiele exakte Zeichnungen. Für den planparallelen Fall gibt er, zum Teil unter Hinweis auf Matthiessen:

$$n = \frac{N_1}{\sqrt{Ry}}, \quad x = a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} + C, \quad a = \frac{R}{2 \sin^2 \tau_0},$$

$$n = N_1 \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2 - R^2}}, \quad y = \sqrt{R^2 + \cos^2 \tau_0 (a^2 - R^2)} \sin \left[\frac{x + C}{\sin \tau_0 \sqrt{a^2 - R^2}} \right],$$

$$n = \sqrt{1 + \frac{y}{a}}, \quad y = x \operatorname{ctg} \tau_0 + \frac{x^2}{4a \sin^2 \tau_0}.$$

*) In den Resultaten ist mittels der Strahlgleichungen und $r^2 = x^2 + y^2$ die kartesische Koordinate durch den Radiusvektor zu ersetzen.

Die weiteren Beispiele beziehen sich auf sphärische Schichtung. Die Gleichungen der Trajektorien werden aber zu umfangreich, um wiedergegeben zu werden und sind außerdem der näheren Erklärung bedürftig. Ich gebe deshalb nur die Indizialkurven an:

$$n = N_1 \frac{r^m}{R^m}; \quad n = \frac{b}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (a > r); \quad n = \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad (r > a).$$

Ebenfalls kommt Garbasso¹⁶⁾ zu einer konkreten Darstellung der Lichtausbreitung. Für den der Biotschen Theorie der Luftspiegelung entsprechenden Fall, daß die Brechungsahl dem Gesetz $n^2 = n_0^2 + a y$ gehorcht, konstruiert er drei mechanische Modelle der Wellenfläche, die deren charakteristischen Phasen entsprechen. In der ersten Phase hat sie eiförmige Gestalt, und ihr Zentrum ist nach der Seite abnehmender Brechungsahl verschoben; die zweite Phase tritt in dem Augenblick auf, wo die „Spitze“ des Eies zu einem singulären Punkt entartet, der sich auf den Wellenflächen der dritten Phase zu einer singulären Linie verwandelt. — Wir werden sehen, daß auch in unserem Medium dieselben Fälle zu unterscheiden sind.

In einer späteren Arbeit behandelt Garbasso¹⁷⁾ die Luftspiegelung. Ich erwähne sie, weil er darin bei seiner Herleitung des Biotschen Gesetzes zu einer *linearen* Formel gelangt, die jedoch nur für sehr kleine Bereiche der quadratischen ebenbürtig ist.

3. Lichtquelle im Medium

a) Strahlbahnen und Wellenflächen

Wir hatten zwei spezielle Annahmen über das Medium gemacht, doch wollen wir zunächst von der Linearität des Wachstums der Brechungsahl absehen und die Gesetze der Strahlbahnen und Wellenflächen für den allgemeineren Fall einer beliebigen *planparallelen* Schichtung ableiten.

Der in der Einleitung aufgestellte Ausdruck (3) für die Strahlkrümmung nimmt in diesem Fall die einfache Gestalt

$$\frac{1}{r} = \frac{dn}{dy} \cdot \frac{\cos \alpha}{n}$$

an, wo unter y die Koordinate verstanden wird, von der n allein abhängt und α der positive oder negative spitze Winkel ist, den die Strahlen mit den Ebenen $y = \text{const}$ bilden. Seine Integration liefert, wenn wir

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

einführen, das Snellius'sche Gesetz

$$(4) \quad n \cos \alpha = n_1 \cos \alpha_1 = k,$$

worin k eine für jeden Strahl feste, durch seine Anfangswerte $n_1 \cos \alpha_1$ gegebene Zahl ist. Danach ändert sich die Richtung eines Strahles nur mit den Beträgen, welche die Brechungszahl erreicht — gleichgültig auf welchen Strecken*).

Stellen wir uns nun eine punktförmige Lichtquelle L im Innern des geschichteten Mediums vor. Um den Strahlenverlauf im ganzen Raum zu kennen, genügt es, ihn in einer L enthaltenden und schichtsenkrechten Ebene („Meridianebene“) zu kennen. Wir führen deshalb eine zur Schichtebene parallele x -Koordinate ein, so daß die Lichtquelle die Abszisse Null erhält. Das Gesetz der Schichtung sei durch eine stetig differenzierbare Funktion, aber nicht in der üblichen Form $n = \varphi(y)$, sondern in deren Umkehrform

$$y = f(n)$$

gegeben. Vermöge des Brechungsgesetzes (4) läßt sich y auch als eine Funktion der Winkel α , α_1 auffassen:

$$(5) \quad y(\alpha, \alpha_1) = f\left(\frac{n_1 \cos \alpha_1}{\cos \alpha}\right) = f\left(\frac{k}{\cos \alpha}\right).$$

Ebenso drücken wir die x -Koordinate als eine Funktion dieser Parameter aus. Wegen

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad dy = k f'\left(\frac{k}{\cos \alpha}\right) \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

ergibt sich:

$$(6) \quad x(\alpha, \alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{dy}{\operatorname{tg} \alpha} = k \int_{\alpha_1}^{\alpha} f'\left(\frac{k}{\cos \alpha}\right) \frac{d\alpha}{\cos \alpha}.$$

Das Differentiationszeichen soll stets die Ableitung nach dem *Argument* bedeuten, hier also nach $k/\cos \alpha$. Setzen wir die Ordinate der Lichtquelle gleich $y_1 = f(n_1)$, so stellen die Formeln (5), (6) die Gesamtheit aller von L in die positive x -Halbebene ausgehenden Strahlen dar, wenn der Anfangswinkel α_1 alle möglichen Werte von 0 bis $\pm 90^\circ$ annimmt. Ein einzelner Strahl ist dadurch gegeben, daß einem bestimmten Wert des Parameters α_1 , des „Scharparameters“, beliebige Werte des laufenden Parameters α , des „Kurvenparameters“, zugehören.

*) Übrigens sind diese und die für kreisförmige Schichtung geltende Beziehung $n r \cos \alpha = \text{const}$ die einzigen Fälle, wo sich ein *endliches* Gesetz $\Theta(n, \alpha) = \text{const}$ aufstellen läßt, wie R. Rothe¹³⁾ gezeigt hat.

Ordnet man jedem α_1 nur einen bestimmten α -Wert zu, so wählt man damit auf jedem Strahl einen gewissen Punkt aus; läßt man α, α_1 alle Werte annehmen, die irgendeine funktionelle Beziehung $\Phi(\alpha, \alpha_1) = 0$ erfüllen, so beschreibt dieser Punkt vermittelt der Transformationen (5), (6) eine gewisse Kurve $F(x, y) = 0$. Die umkehrbare Bezogenheit zwischen den Parameter- und Koordinatenpaaren hört nur dort auf, wo die Funktionaldeterminante D verschwindet. Nun enthält

$$(7) \quad D = x_\alpha y_{\alpha_1} - x_{\alpha_1} y_\alpha = 0$$

als Bedingung für die Diskriminantenkurve einer Kurvenschar mit α_1 und α als Schar- bzw. Kurvenparameter gleichzeitig deren *Umhüllende*. Führen wir in (7) die partiellen Ableitungen von (5) und (6) ein, so erhalten wir mit (5), (6) zusammen die Umhüllende unserer Strahlenschar. Die Ableitungen lauten:

$$(8) \quad \begin{cases} x_\alpha = k f' \frac{1}{\cos \alpha}, \\ x_{\alpha_1} = -n_1 \sin \alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha} f' \frac{d\alpha}{\cos \alpha} - k \int_{\alpha_1}^{\alpha} f'' \frac{n_1 \sin \alpha_1}{\cos^2 \alpha} d\alpha - k f' (n_1) \frac{1}{\cos \alpha_1}, \\ y_\alpha = k f' \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}, \\ y_{\alpha_1} = -n_1 \sin \alpha_1 f' \frac{1}{\cos \alpha}. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für (7)

$$D = - \frac{k f' n_1}{\cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \alpha_1} R = 0,$$

wo R eine Abkürzung für den Ausdruck

$$(9) \quad \begin{cases} R = f' \left(\frac{k}{\cos \alpha} \right) \frac{1}{\sin \alpha} - f' (n_1) \frac{1}{\sin \alpha_1} \\ \quad - \int_{\alpha_1}^{\alpha} f' \frac{d\alpha}{\cos \alpha} - k \int_{\alpha_1}^{\alpha} f'' \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \alpha_1 \neq 0) \end{cases}$$

ist. Für ein inhomogenes Medium, wie wir es betrachten, ist stets $f' = \frac{dy}{dn} \neq 0$; folglich verschwindet D nur, wenn auch R verschwindet.

Für ein ebenes Strahlensystem

$$(6a) \quad x = x(\alpha, t),$$

$$(5a) \quad y = y(\alpha, t),$$

das durch einen Scharparameter t^*) und den Tangentenwinkel α als Kurvenparameter gegeben ist, kann (7) wegen $y_a : x_a = \operatorname{tg} \alpha$ auch auf die Form

$$(7a) \quad x_t \sin \alpha - y_t \cos \alpha = 0$$

gebracht werden, worauf wir im 4. Abschnitt zurückgreifen werden.

Der erste Differentialquotient einer durch das obige Gleichungssystem und eine zusätzliche Beziehung $\Phi(\alpha, t) = 0$ festgelegten Kurve ist allgemein:

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_a + y_t \frac{dt}{d\alpha}}{x_a + x_t \frac{dt}{d\alpha}} = \frac{y_a \Phi_t - y_t \Phi_\alpha}{x_a \Phi_t - x_t \Phi_\alpha}.$$

Z. B. ist für das Strahlensystem:

$$\Phi \equiv t - \text{const} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t}$$

und für die Kurven konstanter Tangentenrichtung, zu denen auch die Kurve der Strahlenscheitel gehört:

$$\Phi \equiv \alpha - \text{const} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t}.$$

Die Strahlenkrümmung ist wegen $dx = ds \cos \alpha$ einfach gleich

$$(3a) \quad \frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos \alpha}{x_a} = \frac{\sin \alpha}{y_a},$$

für ein parallelschichtetes Medium also

$$(3b) \quad \frac{1}{r} = \frac{\cos^2 \alpha}{kf'},$$

was mit (3) übereinstimmt, da

$$\frac{\Re \operatorname{grad} n}{n} = \frac{dn}{dy} \cos \alpha : \frac{k}{\cos \alpha}.$$

Die Scheitelkurve der durch (5), (6) dargestellten Strahlen ergibt sich, wenn darin $\alpha = 0$ gesetzt wird**). In den Punkten, wo $\alpha = 0$ ist, könnten auch gleichzeitig Ableitungen höherer Ordnung verschwinden. Diese müßten wir untersuchen, um zu prüfen, ob die Scheitel echte Extrema sind. Anstatt dessen stellen wir folgende Überlegung an.

Echte Extrema liegen jedenfalls vor, wenn die 2. Ableitung und damit die Strahlkrümmung nicht verschwindet. Letztere nimmt in den Scheiteln den Wert $\frac{1}{r} = \frac{1}{n} |\operatorname{grad} n|$ an; denn dort wird das Licht schichtparallel, so daß in (3)

$$\Re \operatorname{grad} n = |\operatorname{grad} n|$$

*) t hat hier nicht die Bedeutung eines Zeitmaßes!

**) Dieses hat selbstverständlich erst nach Ausführung der Quadratur zu geschehen.

ist. Die Scheitelkrümmung verschwindet also dort und nur dort, wo der Gradient der Brechungszahl verschwindet. Ist für irgendeinen Punkt $\text{grad } n \neq 0$, so liegen die Krümmungsmittelpunkte aller durch ihn hindurchgehenden Strahlen auf einer in endlichem Abstand von ihm befindlichen und zu $\text{grad } n$ senkrechten Ebene (vgl. Abschn. 1), d. h. außer dem zu $\text{grad } n$ parallelen Strahl besitzen alle Strahlen eine von Null verschiedene Krümmung, wie dies auch aus (3b) abzulesen ist.

Nachdem bisher die Gleichungen der Lichtstrahlen, ihrer Umhüllenden und ihrer Scheitelkurve ermittelt wurden, wollen wir unter Beibehaltung der Winkelparameter auch die *Wellenflächen* bestimmen. Wir benutzen ihre Definition als Flächen konstanten optischen Lichtwegs, den wir von der Lichtquelle aus rechnen, und erhalten mit Beachtung von $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{k f'}{\cos^2 \alpha}$ für ihre Meridiankurven

$$(11) \quad E = \int_L^F n \, ds = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{k}{\cos \alpha} \frac{k f'}{\cos^2 \alpha} d\alpha = k^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha} f' \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha}.$$

Damit haben wir die wichtigsten Ausdrücke für den Fall *beliebiger* planparalleler Schichtung berechnet und wollen sie nun auf ein Medium anwenden, daß nach unserer Annahme b) (vgl. Einleitung) durch ein *lineares* Gesetz

$$(12) \quad y = f(n) = pn + q$$

gekennzeichnet ist. Dann stellen sich die Strahlen nach (5), (6) durch das folgende System dar:

$$y = p n_1 \cos \alpha_1 \frac{1}{\cos \alpha} + q,$$

$$x = p n_1 \cos \alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos \alpha}.$$

Ebenso könnten wir die allgemeinen Ausdrücke (8), (9), (3b), (11) direkt durch Einsetzen von $f(n) = pn + q$, $f'(n) = p$ spezialisieren. Wir wollen jedoch den linearen Fall für sich verfolgen. Dazu führen wir folgende zu seiner rationellen Darstellung geeignete Größen ein: *Erstens* entfernen wir die lediglich störenden Konstanten durch eine lineare Transformation der Koordinaten, indem wir setzen:

$$(13) \quad \begin{cases} \eta = \frac{y - q}{p n_1}, \\ \xi = \frac{x}{p n_1}. \end{cases}$$

Die Einheit des neuen Systems wird also einerseits durch den Proportionalitätsfaktor p , andererseits durch die zum Orte der Licht-

quelle gehörende Brechungsahl n_1 bestimmt. Sie liegt allen Formeln zugrunde, die sich auf den Fall der punktförmigen Lichtquelle im Innern des nach den Annahmen a) und b) beschaffenen Mediums beziehen. Für alle hierin einbegriffenen praktischen Fälle lassen sich diese Formeln durch die Transformationen (13) umrechnen.

Zweitens stellen wir den Winkel α als *Hyperbelamplitude* eines neuen Parameters, u , dar:

$$\alpha = \text{Amp } u; \quad u = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos \alpha}.$$

Zwischen den Hyperbelfunktionen von u und den Kreisfunktionen von α gelten die wiederholt gebrauchten Beziehungen*)

$$(14) \quad \text{Coj } u = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \text{Sin } u = \text{tg } \alpha, \quad \text{Zg } u = \sin \alpha.$$

Damit und mit der obigen Transformation schreiben sich die Strahlgleichungen in der übersichtlichen Form

$$(15) \quad \eta \text{Coj } u_1 = \text{Coj } u.$$

$$(16) \quad \xi \text{Coj } u_1 = u - u_1.$$

Die hieraus folgende einparametrische Darstellung

$$(17) \quad \eta = \frac{1}{\text{Coj } u_1} \text{Coj}(\xi \text{Coj } u_1 + u)$$

zeigt die Strahlen als eine Schar einander ähnlicher Kurven, nämlich hyperbolischer Coj-Linien, mit dem Ähnlichkeitsfaktor $1/\text{Coj } u_1$ (Abb. 1). In ihren Scheitelpunkten kehren die Strahlen ($\alpha < 0$) um und wenden sich wieder den Schichten mit größeren Brechungsahlen zu. Nur solche Strahlen, die die zur Schichtung parallel angenommene Grenzebene schneiden, kehren nicht zurück, sondern setzen sich, das ganze anschließende (homogen gedachte) Medium ausfüllend, geradlinig fort. Dieser Teil des Strahlenverlaufes ist nur in Abb. 2 gezeichnet. Seine Berechnung erfolgt am Schluß dieses Abschnitts. Der steilste, noch eben zurückkehrende Strahl ist in Abb. 1 und 2 gezeichnet. (Sein Anfangswinkel ergibt sich in Abb. 1 wegen der im folgenden Absatz über die Grenzebene getroffenen Annahme aus $\cos \alpha_1 = 0,1$ zu $\alpha_1 = -84^\circ 15,7'$.) Weitere Strahlen sind berechnet für die Winkel $\alpha_1 = \pm 0, 15, 30, 45, 60, 75^\circ$.

In den Abb. 1 und 2 wurde für die Grenzebene $\eta = \frac{1}{10}$ angenommen, womit gefordert wird, daß der Brechungsindex an der Grenzfläche den 10. Teil seines Wertes am Ort der Lichtquelle erreicht. Diese Annahme trägt der Praxis insofern Rechnung, als sie

*) Vgl. z. B. E. Jahnke u. F. Emde¹⁹⁾.

eine untere Grenze für den Brechungsindex setzt. Für die mathematische Beschreibung der Lichtausbreitung nach Abb. 1 wollen wir diese Grenze aber fallen lassen.

Die von L ausgehenden Lichtstrahlen erfüllen einen glockenförmigen Raum, dessen Grenzfläche Umhüllende aller Strahlen ist. Jeder Punkt desselben wird von zwei Strahlen erreicht: von dem einen *direkt*, von dem anderen auf dem *Umweg* über die Grenzfläche.

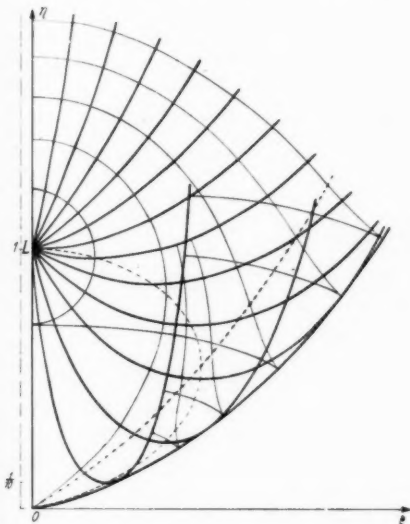


Abb. 1. Von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehende Strahlen und Wellenflächen in einem isotropen Medium, dessen Brechungs-
zahl a) in parallelen Ebenen konstant ist
und b) ein lineares Änderungsgesetz befolgt

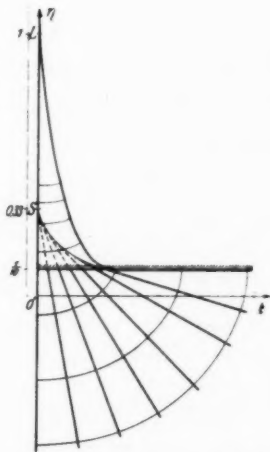


Abb. 2. Strahlen und Wellenflächen, die an der Grenzfläche des nach unseren Annahmen a) und b) beschaffenen inhomogenen Mediums in ein anschließendes homogenes Medium eintreten

Eine Meridianebene (vgl. S. 598) wird also von zwei Strahlenscharen bedeckt, nämlich von einer „direkten“ und einer aus dieser hervorgehenden „indirekten“ Schar. Analog sprechen wir von dem direkten oder indirekten Teil einer Wellenfläche, je nachdem dieser zu Strahlen der direkten oder indirekten Schar gehört. Abb. 1 lehrt, daß die Wellenflächen bei kleinem optischen Abstand von der Lichtquelle rein direkter Art sind, während sie nach Überschreitung eines bestimmten Abstandes*) sämtlich einen indirekten Teil aufweisen, der

*) Er hat die Größe
$$E_{(xy)} = \int_{n=n_1}^{n=0} n ds = \int_{y=p n_1 + q}^{y=q} \frac{y-q}{p} (-dy) = \frac{p n_1^2}{2}.$$

mit dem direkten in einer spitzen Kante zusammenstößt, die sich im Verlauf der Ausbreitung längs der Umhüllenden des Strahlenraumes fortbewegt.

Der Ort der *Strahlenscheitel* ergibt sich direkt aus der Parameterdarstellung (15), (16) der Lichtstrahlen, wenn dort (wegen $\alpha = 0$) $u = 0$ gesetzt wird:

$$\eta \operatorname{Cof} u_1 = 1, \quad \xi \operatorname{Cof} u_1 = -u_1;$$

oder unter Elimination von u_1 :

$$\eta \operatorname{Cof} \frac{\xi}{\eta} - 1 = 0.$$

Er ist in Abb. 1 gestrichelt eingezeichnet. Seine Steigung*) ist $\frac{d\xi}{d\eta} = \operatorname{Ctg} u_1 - u_1$, woraus mit $\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \operatorname{Cof} u_1 \operatorname{Ctg}^3 u_1$ seine Krümmung zu

$$\frac{1}{\varrho} = \operatorname{Cof} u_1 \operatorname{Ctg}^3 u_1 [1 + (\operatorname{Ctg} u_1 - u_1)^2]^{-1/2}$$

folgt. Für das Maximum der Abszisse ist $\frac{d\xi}{d\eta} = 0$, d. h.

$$(18) \quad \operatorname{Ctg} u_1 = u_1 = 1,1997^{10}),$$

ein Wert, der noch wiederkehren wird. Mit ihm ergeben sich die Koordinatenwerte $\xi_m = 0,663$ und $\eta_m = 0,552$. Der zugehörige Krümmungsradius ist $\varrho_m = (\operatorname{Cof} u_1 \operatorname{Ctg}^3 u_1)^{-1} = 0,320$. Im Maximum der Ordinate ($\xi = 0$, $\eta = 1$) ist $\lim_{u_1 \rightarrow 0} \varrho = 1$. Es sei bemerkt, daß die

Scheitelkurve nicht zentralsymmetrisch ist, wie das z. B. bei der Annahme von Wierz⁹⁾: $y = a(n^2 - 1)$ der Fall ist, wo sie die Gestalt einer Ellipse besitzt.

Die Krümmung der Lichtstrahlen folgt aus

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{Sin} u, \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \operatorname{Cof} u_1 \operatorname{Cof} u:$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\operatorname{Cof} u_1}{\operatorname{Cof}^2 u}.$$

Ihren maximalen Wert erreicht sie in den Scheiteln $u = 0$, nämlich $\frac{1}{\varrho} = \operatorname{Cof} u_1$. Der „Ähnlichkeitsfaktor“ der Strahlen in (17) ist also mit deren kleinstem Krümmungsradius identisch.

*) Sie ist ein Spezialfall der sich für Kurven konstanter Strahlenrichtung nach S. 600 ergebenden Formel

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\partial \xi}{\partial u_1} : \frac{\partial \eta}{\partial u_1} = \frac{1}{\operatorname{Cof} u} (\operatorname{Ctg} u_1 + u - u_1) \quad (u = \text{const}).$$

Die in $\xi \eta$ -Einheiten von L aus gerechnete Bogenlänge der Strahlen ist*)

$$(19) \quad \sigma = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\xi}{\cos \alpha} = \int_{u_1}^u \frac{\mathfrak{Cof} u}{\mathfrak{Cof} u_1} du = \frac{1}{\mathfrak{Cof} u_1} (\mathfrak{Sin} u - \mathfrak{Sin} u_1).$$

Für die Strahlen $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$ läßt sich für sie eine einfache geometrische Deutung geben, wenn man sie bis zur Rückkehr der Strahlen zur Ebene $\eta = 1$ rechnet; dann stimmt ihr Wert

$$(20) \quad \sigma_1 = -2 \mathfrak{I}g u_1 = -2 \sin \alpha_1$$

nämlich überein mit dem Abschnitt, den eine (die Ebene $\eta = 1$ in L berührende) Einheitskugel, deren Mittelpunkt in den Koordinatenursprung fällt, aus den geradlinig fortgesetzt gedachten Strahlen ausschneidet (Abb. 3).

Zur Berechnung der Umhüllenden der Strahlenschar greifen wir auf die im allgemeinen Teil angegebene Bedingung (7) des Verschwindens der Funktionaldeterminante bzw. der Größe R [vgl. Formel (9)] zurück. Die Einführung des linearen Gesetzes und der u -Parameter liefert

$$(9a) \quad R = \mathfrak{Ctg} u - u - (\mathfrak{Ctg} u_1 - u_1) = 0,$$

was mit (15), (16) zusammen die Umhüllende ergibt. Sie ist in Abb. 1 stark ausgezeichnet.

Der allgemeine Differentialquotient (10) lautet, wenn jetzt (15), (16), u, u_1 an die Stelle von (5a), (6a), α, t treten:

$$(21) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \mathfrak{Sin} u \left(1 + \frac{R}{\frac{du}{du_1} \mathfrak{Ctg} u_1 - \mathfrak{Ctg} u} \right)^{-1}.$$

Wie zu erwarten, stimmt sein Wert auf der Enveloppe $R = 0$ mit dem der Strahlen überein. Die Krümmung der Enveloppe läßt sich als Funktion der u -Parameter mit Hilfe von

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mathfrak{Sin} u, \quad \frac{d\xi}{du} = \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \cdot \frac{R_u}{R_{u_1}} = \frac{1}{\mathfrak{Cof} u_1} \left(1 - \frac{\mathfrak{Ctg}^2 u}{\mathfrak{Ctg}^2 u_1} \right)$$

leicht bestimmen. Es ist nämlich

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) : \frac{d\xi}{du} = \frac{\mathfrak{Cof} u \mathfrak{Cof} u_1}{1 - \frac{\mathfrak{Ctg}^2 u}{\mathfrak{Ctg}^2 u_1}}$$

*) Die wirkliche Bogenlänge ist das pn_1 -fache, d. h. $s = pn_1 \sigma$.

und folglich

$$(22) \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{\mathfrak{Cof} u_1}{\mathfrak{Cof}^2 u} \left(1 - \frac{\mathfrak{Ctg}^2 u}{\mathfrak{Ctg}^2 u_1} \right)^{-1}.$$

Da stets $\frac{\mathfrak{Ctg} u}{\mathfrak{Ctg} u_1} < 0$ ist, wie man aus dem Verlauf der Funktion $\mathfrak{Ctg} u_1 - u_1$ in Verbindung mit der Bedingung (9a) [$R = 0$] erkennen kann, und da $\mathfrak{Cof} u_1 \geq 1$ ist, so ist die zweite Ableitung stets positiv, die Enveloppe also nach oben konkav.

Wir gehen nun zur Behandlung der *Wellenflächen* über. Unter Zugrundelegung des linearen Gesetzes (12) erhalten wir aus der allgemeinen, für die Meridiankurve gültigen Formel (11):

$$E_{(xy)} = p n_1^2 \cos^2 \alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha}$$

oder, wenn wir wie in (13) ξ η -Einheiten und nach (14) u -Parameter einführen und integrieren:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{E_{(xy)}}{p n_1} = \frac{n_1}{\mathfrak{Cof}^2 u_1} \int_{u_1}^u \mathfrak{Cof}^2 u \, du, \\ E &= \frac{n_1}{2 \mathfrak{Cof}^2 u_1} [\sin u \mathfrak{Cof} u + u - (\sin u_1 \mathfrak{Cof} u_1 + u_1)]. \end{aligned} \right.$$

Um bei gegebenen Werten von E zu jedem Scharparameter den zugehörigen Kurvenparameter zu finden, muß die transzendente Gleichung

$$\sin 2u + 2u = \sin 2u_1 + 2u_1 + E \frac{4 \mathfrak{Cof}^2 u_1}{n_1}$$

gelöst werden. Für Abb. 1 wurden zur Charakteristik der Wellenflächen solche Werte E gewählt, die Vielfache des Wertes $E = \frac{n_1}{4}$ darstellen. Ferner wurden Stücke der Wellenflächen

$$E = \frac{9}{16} n_1 \quad \text{und} \quad E = \frac{10}{16} n_1$$

eingeschoben und die Wellenfläche $E = \frac{3}{4} n_1$ soweit ausgezeichnet, wie es dem Fall entspräche, daß das Medium nicht begrenzt, sondern im ganzen Bereich $n > 0$ vorhanden wäre.

Um zu bestätigen, daß entsprechend dem Malusschen Satz für *isotrope* Medien die Wellenflächen senkrecht zu den Strahlen sind, benutzen wir Formel (21), in welcher

$$(24) \quad \frac{du}{du_1} = - \frac{E_{u_1}}{E_u} = \frac{\mathfrak{Ctg} u - R + \sin \mathfrak{Cof} u}{\mathfrak{Ctg} u_1 \mathfrak{Cof}^2 u}$$

einzusetzen ist. Man sieht, daß für die Wellenflächen

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{\sin u} \left(1 + \frac{R \cos^2 u}{\operatorname{ctg} u - R + \sin u \operatorname{ctg} u - \operatorname{ctg} u \cos^2 u} \right) = -\sin u$$

ist.

Ähnlich wie bei der Berechnung der Krümmung der Enveloppe, berechnen wir hier mit Hilfe von

$$\frac{d}{du} \left(\frac{d\xi}{d\eta} \right) = -\operatorname{ctg} u \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{du} = \frac{-R \sin u}{\operatorname{ctg} u_1 (\operatorname{ctg} u - R + \sin u \operatorname{ctg} u)}$$

die Krümmung der Meridiankurven der Wellenflächen:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r_W} &= \frac{\operatorname{ctg} u_1}{\cos^2 u \sin u} \cdot \frac{\operatorname{ctg} u - R + \sin u \operatorname{ctg} u}{R} \\ &= \frac{\operatorname{ctg} u_1}{\cos u} \left(\frac{\operatorname{ctg}^2 u}{R} - \frac{1}{\sin u \operatorname{ctg} u} \right). \end{aligned} \right.$$

Wie man aus der letzten Form sieht, existiert auf der Umhüllenden $R = 0$ die Krümmung nicht. Dies war zu erwarten, da die Umhüllende einer Schar zugleich Ort der Spitzen ihrer Orthogonalschar ist.

Die Meridiane der direkten Teile der Wellenflächen $E > \frac{n_1}{2}$ *) zeigen jeder einen Punkt, in dem ihre Krümmung mit Zeichenwechsel verschwindet. Der Ort dieser Wendepunkte ist durch die Parametergleichung

$$\operatorname{ctg} u - R + \sin u \operatorname{ctg} u = 0$$

oder mit Beachtung von (23) durch $\frac{2E}{n_1} + \operatorname{ctg} u_1 = 0$ gegeben, wozu noch die Strahlgleichungen hinzutreten. Er ist in Abb. 1 gestrichelt und mit Punkten versehen.

Alle direkten Meridianäste der Wellenflächen, welche die in Abb. 1 gestrichelte Kurve der Strahlenscheitel schneiden, besitzen in den Schnittpunkten eine vertikale Tangente und haben daselbst nach (25) die Krümmung:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{r_W} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} u_1}{\cos^2 u} \cdot \frac{u + \operatorname{ctg} u_1 - u_1 + \sin u \operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u - \sin u (u + \operatorname{ctg} u_1 - u_1)} = \operatorname{ctg} u_1 (\operatorname{ctg} u_1 - u_1).$$

Im Abszissenmaximum der Scheitelkurve verschwindet sie, weil dort nach (18) $\operatorname{ctg} u_1 - u_1 = 0$.

Ebenfalls folgt direkt aus (25) für die Meridiankrümmung des sich längs des Strahles $u_1 = 0$ fortpflanzenden Wellenflächenelements

$$\left(\frac{1}{r_W} \right)_{u_1=0} = \frac{1}{\sin u \cos^2 u}.$$

*) Vgl. Anm. S. 603.

Um die Meridiankrümmung auch längs der η -Achse zu berechnen, lassen wir $\alpha_1 \rightarrow \pm 90^\circ$ und deshalb nach (4) auch $\alpha \rightarrow \pm 90^\circ$ streben, so daß beide u -Parameter in (25) große Absolutwerte annehmen. Es gelten nun für $|u| \gg 1$ die bekannten Näherungen

$$\operatorname{Cof} u \approx \frac{1}{2} e^{|u|}, \quad |\operatorname{Sin} u| \approx \frac{1}{2} e^{|u|}, \quad \operatorname{Ctg} u \approx 1.$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich für (25) angenähert schreiben

$$\frac{1}{r_W} \approx \frac{\operatorname{Cof} u_1}{\operatorname{Cof} u} \cdot \frac{1}{u - u_1} \quad (|u| \gg 1).$$

Da für alle direkten Strahlen in der Nähe der η -Achse u, u_1 gleichnamig sind, setzen wir hierin unter Benutzung von $|u| \approx \ln 2 \operatorname{Cof} u$

$$|u - u_1| \approx \left| \ln \frac{\operatorname{Cof} u}{\operatorname{Cof} u_1} \right| \quad (|u| \gg 1).$$

Indem wir schließlich zur Grenze übergehen und $\frac{\operatorname{Cof} u}{\operatorname{Cof} u_1} = \eta$ einführen, erhalten wir

$$\left| \frac{1}{r_W} \right|_{\xi=0} = \left| \frac{1}{\eta \ln \eta} \right|.$$

Im geringen Abstand ε von der Lichtquelle ist

$$\left| \frac{1}{r_W} \right|_{\xi=0} = \left| \frac{1}{(1+\varepsilon)(\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots)} \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon + 2(\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots)} \right| \quad (|\varepsilon| \ll 1),$$

d. h. der Absolutwert der Meridiankrümmung ist oberhalb der Lichtquelle ($\varepsilon > 0$) kleiner als $\left| \frac{1}{\varepsilon} \right|$, unterhalb ($\varepsilon < 0$) größer als $\left| \frac{1}{\varepsilon} \right|$.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch den indirekten Teil der Wellenflächen. Ein solcher ist in Punkten der η -Achse nur dann vorhanden, wenn der Strahl $\alpha_1 = -90^\circ$ in sich zurückkehrt, d. h. nur unter der unerfüllbaren Voraussetzung, daß n unter jedes Maß hinabsinkt. Dies dennoch angenommen, ergibt sich nach (25) ein Verschwinden der Meridiankrümmung auf der η -Achse, denn die Größe R wird zusammen mit den nunmehr ungleichnamigen u -Parametern unendlich. —

Weiter oben (S. 605) ist gezeigt worden, daß sich der geometrische Weg des Lichtes für Strahlen $\alpha_1 < 0$ einfach darstellen läßt, wenn er von der Lichtquelle bis zur Rückkehr zur Ebene $\eta = 1$ gerechnet wird. Er hat dann genau den Wert $\sigma_1 = -2 \sin \alpha_1$. Wir wollen ihn mit dem optischen Lichtweg vergleichen, den wir für dieselben Strahlenabschnitte berechnen (Abb. 3). Für $u = -u_1$ folgt aus (23)

$$E_1 = n_1 \frac{-\operatorname{Sin} u_1 \operatorname{Cof} u_1 - u_1}{\operatorname{Cof}^2 u_1}.$$

Darin ist E_1 , wie die Bogenlänge in $\xi\eta$ -Einheiten gerechnet. Letztere erreicht um so größere Beträge, je näher α_1 an -90° herankommt, während das Maximum des Lichtwegs wegen

$$\frac{dE_1}{du_1} = \frac{2n_1 \sin u_1}{\cos^3 u_1} (u_1 - \text{Ctg } u_1) = 0$$

bei $u_1 = \text{Ctg } u_1 = 1,1997$ liegt. Dies ist nach (18) aber gerade derjenige Strahl, der zum Abszissenmaximum der Scheitelkurve, also auch zum Rand des Lichtbereiches auf der Ebene $\eta = 1$ führt.

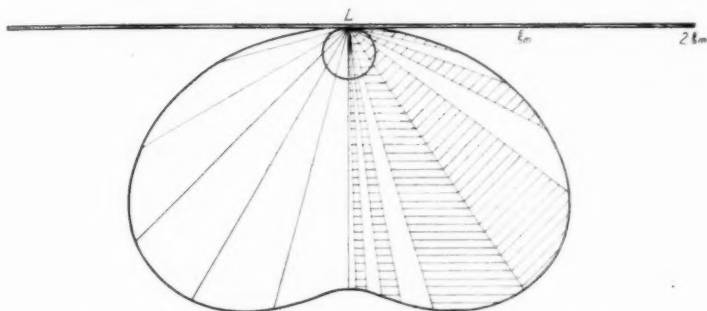


Abb. 3. Vergleich des geometrischen und optischen Lichtwegs für Strahlen, die von L in den gezeichneten Richtungen ausgehend, zur Ebene der Lichtquelle zurückkehren

In Abb. 3 sind die zu vergleichenden Größen in den Anfangsrichtungen der Strahlen abgetragen, und zwar in einem $1:n_1$ mal kleineren Maßstab, als es der Abb. 1 entspräche. Ihre Absolutwerte stehen deshalb in einem so krassen Verhältnis, weil E_1 (Muschelform) zu n_1 proportional ist, während σ_1 (Kreis) davon unabhängig ist — falls beide Größen in $\xi\eta$ -Einheiten gemessen werden. In unserem Beispiel haben wir $n_1 = 10$ gewählt. Was uns interessiert, ist der verschiedene Charakter der Kurven für den geometrischen und optischen Lichtweg.

Es sind auf der linken Hälfte der Abb. 3 die der Abb. 1 entsprechenden Strahlen gezeichnet, rechts solche, deren Scheitelabszissen sich um den sechsten Teil der Maximalabszisse $\xi_m = 0,663$ der Scheitelkurve unterscheiden, deren Rückkehrpunkte zur Ebene $\eta = 1$ also auf Kreisen um L von gleichen Abständen liegen. Die zu den so begrenzten Ringgebieten dieser Ebene gelangenden Strahlen sind in Abb. 3 abwechselnd schraffiert. Einem Beobachter in L , dessen Zenith in der negativen η -Richtung liegt (man betrachte die

Abb. 1 und 3 umgekehrt), und der die optische Weglänge als Entfernung wahrnimmt, erscheint seine ebene Umgebung zu einem Hohlkörper mit muschelförmigem Querschnitt gewölbt, an dessen fernsten „Breitenkreis“ sich alle vorher durchlaufenen Zonen in umgekehrter Reihenfolge anschließen und sich bis auf den Zenithpunkt zusammenziehen. Eine „Spiegelung“ von L selbst könnte nur stattfinden, wenn die Brechungszahl auf Null herabsinken würde. Der Beobachter nimmt also jeden Punkt der durch $r = 2\xi_m = 1,326$ begrenzten Kreisfläche in zwei verschiedenen Richtungen und zu verschiedenen Zeiten wahr, während alle außerhalb derselben gelegenen Punkte überhaupt nicht gesehen werden. — Derartige Wiederholungen sind aus dem Gebiet der Luftspiegelung bekannt; man kommt dort zu drei- und mehrfachen Bildern^{20), 21)}.

Zum Schluß des Abschnitts geben wir die Gleichung an, nach der die aus einer schichtparallelen Begrenzungsfläche $\eta = a$ austretenden Strahlen zu berechnen sind. Für den in Abb. 2 dargestellten Fall, daß das anschließende homogene Medium die Brechungszahl der Grenzfläche besitzt, die Strahlen also nicht gebrochen werden, lautet sie, wie nicht näher ausgeführt sei:

$$\eta - a = - \frac{1}{\cos \alpha_1} \sqrt{a^2 - \cos^2 \alpha_1} \left(\xi - \cos \alpha_1 \ln \frac{1 - \sin \alpha_1}{a + \sqrt{a^2 - \cos^2 \alpha_1}} \right).$$

Es sind in der Abbildung für $a = 0,1$ sechs Strahlen gezeichnet. Der Abstand der Wellenflächen beträgt $\Delta E = \frac{n_1}{40}$. — Die virtuelle Brennpunktfläche der Strahlenschar hat eine Spitze, von der ein paraxiales Bündel auszugehen scheint. Lassen wir in obiger Gleichung $\alpha_1 \rightarrow -90^\circ$ gehen und setzen $\xi = 0$, so erhalten wir für ihre Ordinate:

$$\eta_s = a(1 - \ln a).$$

Für $a = 0,1$ ist $\eta_s = 0,330$.

b) Helligkeitsverteilung

Die Lichtquelle möge auf einer sie umschließenden Einheitskugel überall die Beleuchtung l erzeugen, falls das Medium homogen wäre. Die Beleuchtung B an irgendeiner Stelle des inhomogenen Mediums ist dann gleich dem Verhältnis der durch ein infinitesimales Bündel aus jener gedachten Kugel ausgeschnittenen Fläche*) zu

*) Diese Fläche ist zahlenmäßig gleich dem räumlichen Winkel, den die Anfangsrichtungen des Strahlenbündels einnehmen.

dessen Querschnitt an dieser Stelle. Zu dieser Festsetzung sind wir berechtigt, wenn wir annehmen, daß das Licht weder absorbiert noch reflektiert wird*). Dann muß der Vektor $\mathfrak{B} = B\mathfrak{E}$ im ganzen Raum um L quellenfrei sein. Daraus läßt sich ein bemerkenswerter Schluß ziehen. Es ist

$$\operatorname{div} B\mathfrak{E} = \mathfrak{E} \operatorname{grad} B + B \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0,$$

also

$$(26) \quad \operatorname{grad} \ln B = - \operatorname{div} \mathfrak{E}.$$

Nun ist aber $\operatorname{div} \mathfrak{E}$ nichts anderes als die mittlere Krümmung H der zu den Stromlinien von \mathfrak{E} orthogonalen Flächenschar, wie aus der Flächentheorie bekannt. Man sieht es leicht ein, wenn man die Tangenteneinheitsvektoren \mathfrak{a} , \mathfrak{b} eines in der betrachteten Fläche liegenden rechtwinkligen Kurvennetzes durch \mathfrak{E} zu einem orthogonalen Tripel ergänzt. Die Kurvenkrümmungen sind**)

$$\mathfrak{a} \nabla \cdot \mathfrak{a} = [\operatorname{rot} \mathfrak{a}, \mathfrak{a}], \quad \mathfrak{b} \nabla \cdot \mathfrak{b} = [\operatorname{rot} \mathfrak{b}, \mathfrak{b}].$$

Ihre Projektionen auf die Flächennormale $-\mathfrak{E}$ ergeben die Krümmungen der zugehörigen, aufeinander senkrecht stehenden Normalschnitte. Somit wird H als deren Summe

$$H = -\mathfrak{E} [\operatorname{rot} \mathfrak{a}, \mathfrak{a}] - \mathfrak{E} [\operatorname{rot} \mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$$

oder mit $\mathfrak{E} = [\mathfrak{a} \mathfrak{b}]$

$$H = \mathfrak{b} \operatorname{rot} \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \operatorname{rot} \mathfrak{b} = \operatorname{div} [\mathfrak{a} \mathfrak{b}] = \operatorname{div} \mathfrak{E}.$$

Was bedeutet die Gl.(26)? Sie besagt, daß die relative Abnahme der Beleuchtung in der Ausbreitungsrichtung der Wellenflächen gleich deren mittlerer Krümmung ist. Nimmt H , wie z. B. im bildseitigen Strahlengang einer optischen Abbildung, *negative* Werte an***), so bedeutet dies eine *Zunahme* der Beleuchtung. Eine solche tritt auch in unserem Beispiel bei Annäherung an die Umhüllende ein.

Bei der vorstehenden Rechnung gingen wir davon aus, daß der Vektor $\mathfrak{B} = B\mathfrak{E}$ quellenfrei sei und mußten die daraus folgende

*) Die Reflexion in einem inhomogenen Medium untersucht W. Behrens (Mathem. Ann. 1915, S. 76) für den Fall der Parallelschichtung. Er findet unter anderem, daß die Intensität der reflektierten Welle zu vernachlässigen ist, wenn die Wellenlänge klein gegen die Änderung der Brechungszahl ist — wie wir dies voraussetzen.

**) Vgl. z. B. R. Rothe, Jahresber. d. D. Mathematikervereinigung 21. S. 249. 1912. Vgl. auch S. 591.

***) Dies tritt ein, weil wir der Flächennormalen die Richtung $-\mathfrak{E}$ gegeben haben.

Gl. (26) durch die Beziehung $H = \text{div } \mathfrak{E}$ und ihre Begründung ergänzen. Dem sei ein weniger strenger, aber anschaulicher und direkter Beweis angefügt, der von der Konstanz des Lichtstromes innerhalb eines Bündels ausgeht. Wir setzen dieser Forderung entsprechend für den Lichtstrom:

$$\Phi = f \cdot B = \text{const},$$

wo f die von dem Bündel senkrecht durchsetzte Fläche bedeutet. Und zwar möge diese Fläche, die ein Stück einer bestimmten Wellenfläche ist, annähernd rechtwinklig begrenzt sein. Die Seiten dieses durch die Randstrahlen unseres Bündels erzeugten „Bogenrechtecks“ seien durch q_1, q_2 bezeichnet und ihre Länge so gewählt, daß

$$q_1 = r_1 d\alpha,$$

$$q_2 = r_2 d\alpha,$$

wenn r_1, r_2 die Krümmungsradien der die Seiten enthaltenden Normalschnitte der Wellenfläche und $d\alpha$ einen sehr kleinen Winkel bedeutet. Der Flächeninhalt des Bogenrechtecks ist um so genauer gleich

$$f \approx q_1 q_2 = r_1 r_2 (d\alpha)^2,$$

je kleiner q_1, q_2 gegen r_1, r_2 oder, was dasselbe ist, je kleiner $d\alpha$ ist. Er nimmt beim Fortschreiten längs der Strahlen um die kleine Länge ds bis auf Größen, die klein von höherer Ordnung sind, den Wert

$$\begin{aligned} f + df &= (r_1 + ds)(r_2 + ds)(d\alpha)^2 \\ &= (r_1 r_2 + (r_1 + r_2)ds)(d\alpha)^2 \end{aligned}$$

an, woraus nach dem Vorigen folgt

$$(27) \quad \frac{1}{f} \frac{df}{ds} = \mathfrak{E} \nabla \ln f = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = H^*).$$

Nehmen wir hinzu, daß wegen $fB = \text{const}$

$$\mathfrak{E} \nabla f B = f \mathfrak{E} \nabla B + B \mathfrak{E} \nabla f = 0,$$

so erhalten wir nach Division mit fB

$$\mathfrak{E} \nabla \ln B = -H \quad \text{q. e. d.}$$

*) Es läßt sich leicht zeigen, daß $\mathfrak{E} \nabla \ln f = \text{div } \mathfrak{E}$, wenn man die Jungsehe Definition der Divergenz als Hüllintegral benutzt, welches über den zwischen zwei benachbarten Wellenflächen eingeschlossenen Raumteil des Bündels zu erstrecken ist.

Wir gehen nun dazu über, die durch ein beliebiges rotations-symmetrisches Strahlenfeld erzeugte Beleuchtung zu berechnen. Wir denken uns die Symmetrieachse wieder mit unserer y -Achse zusammenfallend und die Lichtstrahlen und Wellenflächen durch

$$\begin{aligned}x &= x(\alpha, \alpha_1), \\y &= y(\alpha, \alpha_1), \\E &= E(\alpha, \alpha_1)\end{aligned}$$

gegeben, wobei α und α_1 die Komplemente der Winkel gegen die Symmetrierichtung sind.

Wir greifen ein Strahlenbündel heraus, das anfänglich durch zwei koaxiale Kegelmäntel mit den Meridianazimuten $\alpha_1, \alpha_1 + \Delta\alpha_1$ begrenzt ist. Es würde bei geradliniger Ausbreitung die Einheitskugel (vom Radius der xy -Einheit) in einer Zone vom Inhalt $\Delta\omega = 2\pi \cos \alpha_1 \Delta\alpha_1$ treffen. Im homogenen Medium wird es aber symmetrisch deformiert und durchsetzt die Wellenflächen in Zonen, deren Inhalt der Größe $\Delta f = 2\pi x r_W \Delta\alpha$ nahekommt, wo r_W der Krümmungsradius des Meridianschnitts der Wellenflächen im Abstand x von der y -Achse ist. Entsprechend unserer Festsetzung ist dann die Beleuchtung

$$(28) \quad B = \lim_{\Delta\alpha_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta f} = \frac{\cos \alpha_1}{x} \cdot \frac{1}{r_W} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha}.$$

Da nach dem Meusnierschen Satz die Krümmung des zur Meridianebene senkrechten Normalschnitts der Wellenfläche gleich $\frac{1}{r_N} = \frac{\cos \alpha}{x}$

ist, und da $\frac{1}{r_N} \cdot \frac{1}{r_W} = K$ das Gaußsche Krümmungsmaß ist, so kann diese Formel auch geschrieben werden

$$B = K \cdot \frac{n}{n_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha}.$$

Die vorige Formel für die Beleuchtung wird im 4. Abschnitt aus einem noch allgemeineren Ansatz hergeleitet werden. Wir wenden sie jetzt unter Benutzung der früher entwickelten Beziehungen (13), (16), (24), (25) auf das *linear* geschichtete Medium an. Mit Hilfe der aus (14) folgenden Identität

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha} = \frac{\cos u \, du_1}{\cos u_1 \, du}$$

erhalten wir für die Beleuchtung, wenn wir sie jetzt auf eine $\xi\eta$ -Einheitskugel (mit dem in xy -Einheiten gemessenen Radius $p n_1$) beziehen:

$$(29) \quad B = \left| \frac{\cos u \cos u_1}{(u - u_1) R} \right|.$$

Dabei ist zu beachten, daß B auf ein zu den Strahlen senkrechtes Flächenelement bezogen ist. In dem Teil des glockenförmigen Licht- raumes, der von Strahlen *vor* und *nach* ihrer Berührung mit der Umhüllenden, also *doppelt*, durchdrungen wird, gehören zu jedem Punkt *zwei* Beleuchtungen, die sich auf die (verschieden gerichteten) Strahlen der direkten und indirekten Schar (S. 603) beziehen und unter Beachtung des cos-Gesetzes addiert werden müssen.

Wir wollen die folgenden Verhältnisse, die wir aus Abb. 1 ver- muten können, rechnerisch bestätigen:

a) In der Nähe der Lichtquelle ist B dem Quadrat der geo- metrischen Entfernung (Bogenlänge) umgekehrt proportional.

b) Außer in L und auf der Oberfläche der Lichtglocke ist B endlich.

c) Längs aller Strahlen mit den Anfangswinkeln $0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ$ nimmt B dauernd ab.

d) B nimmt für alle Strahlen $-90^\circ < \alpha_1 < 0^\circ$ zunächst nach a) ab, wächst dann bei Annäherung an die Enveloppe über alle Grenzen, um weiterhin beliebig abzusinken.

In der Nähe der Lichtquelle ist $u - u_1 \ll 1$. Dadurch geht (19) wegen $\sin u - \sin u_1 = 2 \cos \frac{u+u_1}{2} \sin \frac{u-u_1}{2}$ über in $\sigma \approx u - u_1$. Ebenso liefert die umgeschriebene Gl. (9a) $R = \frac{-\sin(u-u_1)}{\sin u \sin u_1} - (u-u_1)$ mit Hilfe von $1 + \sin u \sin u_1 \approx \cos u \cos u_1$ die Annäherung: $R = -(u-u_1) \cotg u \cotg u_1$, womit $B \approx \frac{1}{(u-u_1)^2} \approx \frac{1}{\sigma^2}$, was a) be- weist.

Die in b) ausgenommenen Stellen sind die einzigen, an denen der Nenner verschwinden kann. Der Zähler kann nur unendlich werden, wenn u oder u_1 zu Null werden. In diesen Fällen gelten jedoch die Grenzwerte $\lim_{u \rightarrow 0} |R \cotg u| = \lim_{u_1 \rightarrow 0} |R \cotg u_1| = 1$, so daß der Wert des Bruches, wie für b) zu beweisen war, endlich bleibt.

Man erkennt aus dem Verlauf der Funktion $\cotg u - u$, der als bekannt angenommen sei, daß die Größe

$$|R| = |\cotg u - u - (\cotg u_1 - u_1)|$$

mit den bei u_1 beginnenden, stets wachsenden u -Werten *zunimmt*: immer, wenn $u_1 > 0$ (Fall c) und für $u_1 < 0$ (Fall d) *dann*, wenn u größer als das zum Berührungspunkt der Enveloppe ($R = 0$) gehörige u ist. Daraus, aus der Zunahme von $u - u_1$ mit wachsenden Abszissen und aus der gleichzeitigen Abnahme von $\cotg u$ folgen die Be- hauptungen c) und d).

Das Unendlichwerden der Beleuchtung auf der Umhüllenden weist darauf hin, daß hier die Annahmen der Geometrischen Optik nicht gemacht werden dürfen. Tatsächlich haben wir bereits in der Einleitung alle Brennflächen, also auch die Enveloppe, aus dem physikalischen Geltungsbereich unseres Ansatzes $n \in \text{grad } E$ ausgeschlossen.

4. Lichtquelle außerhalb des Mediums

a) Strahlbahnen und Wellenflächen

Im vorhergehenden wurde eine punktförmige Lichtquelle innerhalb des Mediums angenommen, so daß ein rotationssymmetrischer Strahlenverlauf auftrat. Im folgenden wird ein Strahlenverlauf vorausgesetzt, der sich in Ebenen vollzieht, die 1. zur Schichtnormalen und 2. untereinander parallel sind. Dieser Fall ist z. B. realisiert durch ein zylindrisches Strahlenbündel, dessen Brennnlinie senkrecht zur Schichtnormalen ist und durch ein Medium, das durch beliebige zylindrische Flächen begrenzt ist, deren Mantellinien zur Brennnlinie parallel sind. Befindet sich letztere innerhalb, so verlaufen die Strahlen wie in Abb. 1. Wir behandeln darum in diesem Abschnitt den Fall einer *außerhalb* des Mediums gelegenen Brennnlinie. In den durchgeführten Beispielen ist sie in verschiedenen Richtungen im Unendlichen liegend angenommen.

Die Strahlgleichungen (5), (6) behalten auch in diesem Falle ihre Gültigkeit, wenn wir unter α_1 , n_1 die Werte beim Eintritt eines Strahles in das Medium verstehen. Jedoch verändert sich im allgemeinen nicht nur α_1 , sondern auch n_1 von Strahl zu Strahl. Deshalb fassen wir in (5), (6) die Größe k , die jeden einzelnen Strahl charakterisiert, als Funktion des Scharparameters der gegebenen Strahlenmannigfaltigkeit auf:

$$k = n_1 \cos \alpha_1 = k(t)^*.$$

Während (5) nach wie vor den Abstand von der Nullebene der Brechungszahl angibt, rechnet (6) vom Eintrittsort eines Strahles in das Medium an. Soll die Abszisse auf einen festen Nullpunkt bezogen sein, so müssen wir zu (6) die auf ihn bezogene Abszisse des Eintrittsortes hinzuzählen. Diese drücken wir ebenfalls als Funktion des Parameters t aus:

$$x_1 = x_1(t).$$

Somit lauten die Strahlgleichungen und ihre partiellen Ableitungen unter den Voraussetzungen dieses Abschnitts:

*) t hat hier nicht die Bedeutung eines Zeitmaßes!

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= f\left(\frac{k(t)}{\cos \alpha}\right), & x &= k(t) \int_{\alpha_1}^{\alpha} f'\left(\frac{k(t)}{\cos \alpha}\right) \frac{d\alpha}{\cos \alpha} + x_1(t), \\ y_{\alpha} &= k f' \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}, & x_{\alpha} &= k f' \frac{1}{\cos \alpha}, \\ y_t &= k' f' \frac{1}{\cos \alpha}, & x_t &= k' \int_{\alpha_1}^{\alpha} f' \frac{d\alpha}{\cos \alpha} + k k' \int_{\alpha_1}^{\alpha} f'' \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \\ & & & - \frac{k}{\cos \alpha_1} f' \left(\frac{k(t)}{\cos \alpha_1} \right) \frac{d\alpha_1}{dt} + x_1'(t). \end{aligned} \right.$$

Die Funktionen $k(t)$ und $x_1(t)$ ergeben sich aus der Lage der Lichtlinie und der Form der das Medium begrenzenden Zylinderfläche (Abb. 4).

Eine ähnliche Korrektur wie an (6) müssen wir vornehmen, wenn wir aus (11) die *Wellenflächen* gewinnen wollen. Wir müssen

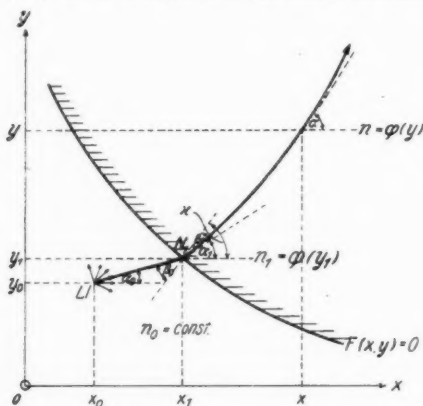


Abb. 4

nämlich zu (11) noch den Lichtweg von der Lichtlinie bis zum Eintrittspunkt in das Medium hinzufügen, damit wir Flächen gleichen Lichtwegs, von der Lichtquelle aus gerechnet, erhalten. Wegen des konstanten Brechungsindex n_0 im Außenmedium läßt sich dieser Lichtweg gleich $n_0 e(t)$ setzen, wo $e(t)$ den geometrischen Abstand des Eintrittspunktes von der Lichtlinie in Abhängigkeit vom Scharparameter bedeutet. Damit wird die in $x y$ -Einheiten gemessene Summe:

$$(31) \quad E_{(xy)} = k^2(t) \int_{\alpha_1}^{\alpha} f' \left(\frac{k(t)}{\cos \alpha} \right) \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} + n_0 e(t).$$

Um ein Beispiel zu geben, wie man zu den Funktionen $k(t)$, $x(t)$ und $e(t)$ gelangen kann, wollen wir nach Abb. 4 die zur Elimination der Unbekannten erforderlichen Gleichungen aufstellen. Gegeben sind die Koordinaten der Lichtlinie $Ll(x_0, y_0)$, die Begrenzung $F(x, y) = 0$ des Mediums und das Gesetz $n = \varphi(y)$. Ein- und Ausfallswinkel des Strahles seien mit β_0 und β_1 bezeichnet. Die Koordinaten des Eintrittsortes $N_1(x_1, y_1)$ können nun durch $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $F(x_1, y_1) = 0$ auf den Winkel α_0 , den ein Strahl im Außenmedium gegen die x -Richtung besitzt, zurückgeführt werden. Damit besitzen wir bereits

$$x_1 = x_1(\alpha_0), y_1 = y_1(\alpha_0) \quad \text{und} \quad e(\alpha_0) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

als Funktionen des Scharparameters $t = \alpha_0$. Weiter gilt an der Grenzfläche des inhomogenen Mediums gegen das Außenmedium:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = \varphi(y_1(\alpha_0)), \\ n_0 \sin \beta_0 = n_1 \sin \beta_1, \\ \alpha_0 + \beta_0 = \alpha_1 + \beta_1 = \pi, \\ \operatorname{tg}(\alpha_0 + \beta_0) = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{mit } x = x_1, y = y_1. \end{array} \right.$$

In diesen 4 Gleichungen können die 4 Unbekannten n_1 , β_0 , β_1 und α_1 und folglich auch $k(t) = n_1 \cos \alpha_1 = k(\alpha_0)$ durch den Parameter α_0 ausgedrückt werden. —

Wir wenden uns nun unserem speziellen Medium zu. Und zwar nehmen wir an, daß paralleles Licht unter einem schiefen Winkel in das durch eine schichtsenkrechte Ebene begrenzte Medium einfällt (Abb. 5). Als Parameter wählen wir die u -Funktion des Winkels α_1 , unter dem das Licht *nach* seiner Brechung an der Grenzfläche gegen die Schichtebene verläuft. Das Außenmedium sei homogen vom Brechungsindex n_0 . Dann gilt auf der Grenzfläche das Brechungsgesetz*)

$$n_0 \sin \alpha_0 = n_1 \sin \alpha_1,$$

wo $n_0 \sin \alpha_0 = c$ für alle Strahlen eines Bündels konstant ist: der Strahlenverlauf im inhomogenen Medium bleibt der nämliche, solange das Produkt $n_0 \sin \alpha_0$ seinen Wert beibehält. Aus dem Brechungsgesetz folgt $n_1 = \frac{c}{\sin \alpha_1}$ und unter Berücksichtigung von (14)

$$(33) \quad k(t) = n_1 \cos \alpha_1 = \frac{c}{\sin \alpha_1} = k(u_1),$$

*) Es geht aus (32) hervor, wenn wir dort $\pi = 0$ setzen.

wenn wir, wie oben schon erwähnt, jetzt u_1 als Parameter wählen. Um zu den Strahlgleichungen und ihren Ableitungen zu kommen, haben wir somit in (30) $t = u_1$ zu setzen und wegen

$$n = \frac{n_1 \cos \alpha_1}{\cos \alpha} = k(u_1) \frac{\cos u}{\sin u_1}$$

das Gesetz (12) in der Form

$$f(n) = p c \frac{\cos u}{\sin u_1} + q; \quad f'(n) = p$$

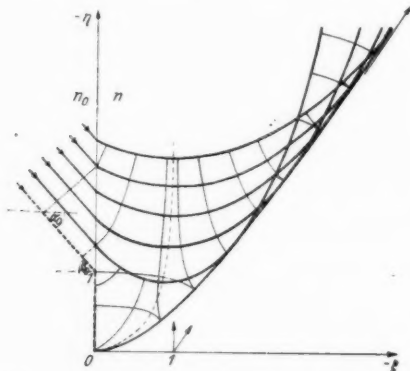


Abb. 5. Strahlen und Wellenflächen von ursprünglich parallelem Licht, das durch eine „senkrechten“ Grenzfläche unter einem *schiefen* Winkel in das inhomogene Medium eintritt

einzuführen. Dieselben Substitutionen sind in (31) vorzunehmen, wo auch $e(t) = e(u_1)$ eine Funktion des u_1 -Wertes ist. Die Strahlgleichungen lauten:

$$y = p c \frac{\cos u}{\sin u_1} + q,$$

$$x = p c \frac{u - u_1}{\sin u_1}.$$

Hierin tritt $p c$ als reiner Dehnungsfaktor auf, geradeso wie in Abschn. 3 die Größe $p n_1$. Wir transformieren deshalb wie in (13):

$$\eta = \frac{y - q}{p c}, \quad \xi = \frac{x}{p c} \quad (c \neq 0),$$

wobei der senkrechte Einfall ($c = 0$) der Strahlen ausgeschlossen bleibt. Wir holen diesen Fall am Ende des Abschnitts nach. Die Größe c nimmt positive oder negative Werte an, je nachdem die Strahlen im Außenmedium mit positivem oder negativem Winkel α_0 verlaufen. Entsprechend sind die $\xi \eta$ -Koordinaten mit den xy -Koordinaten gleich- oder entgegengesetzt gerichtet. Mit den reduzierten Koordinaten lauten die Strahlgleichungen:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta \sin u_1 = \cos u, \\ \xi \sin u_1 = u - u_1, \end{array} \right. \quad \text{oder auch} \quad \eta = \frac{1}{\sin u_1} \cos (\xi \sin u_1 + u_1).$$

In unserem Beispiel ist $c < 0$, folglich entspricht dem 1. Quadranten des xy -Systems der 3. Quadrant des $\xi\eta$ -Systems, was die Bezeichnungsweise der Achsen in Abb. 5 erklärt. Falls $c > 0$, entspricht ihm der 1. Quadrant des $\xi\eta$ -Systems.

Die Kurve der *Strahlenscheitel* wird durch

$$\eta = \frac{1}{\sin u_1}, \quad \xi = -\frac{u_1}{\sin u_1}$$

gegeben. Für $u_1 \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$, strebt $\xi \rightarrow -1$. Die Kurve besitzt also die Asymptote $\xi = -1$. Ihre Krümmung ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^4 u_1}{\cos^3 u_1} (1 + (\operatorname{tg} u_1 - u_1)^2)^{-3/2}.$$

Die Krümmung der *Strahlen* beträgt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin u_1}{\cos^2 u_1},$$

ihre Bogenlänge, wieder in $\xi\eta$ -Einheiten gemessen, ist

$$\sigma = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\xi}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin u_1} (\sin u - \sin u_1),$$

woraus man sieht, daß sie, von der Grenze des Mediums bis zur Scheitelkurve gerechnet, *konstant* ist*).

Die *Umhüllende* der Strahlenschar erhalten wir, wenn wir in (34) die Parameter u, u_1 durch die aus (7a) folgende Beziehung

$$(35) \quad \operatorname{ctg} u - u - (\operatorname{tg} u_1 - u_1) = 0$$

verbinden.

Um die Asymptote der Umhüllenden zu finden, gehen wir von der Gleichung ihrer Tangente im Punkte (ξ, η) aus, den wir ins Unendliche gehen lassen, indem wir $u_1 \rightarrow 0$ gehen lassen — wie dies aus (34) folgt. Die Tangentengleichung der Strahlen lautet mit den laufenden Koordinaten Ξ, H

$$H - \frac{\cos u}{\sin u_1} = \sin u \left(\Xi - \frac{u - u_1}{\sin u_1} \right),$$

woraus mit (35) für die Tangentengleichung der Umhüllenden

$$H = \sin u \left(\Xi + \frac{1}{\cos u_1} \right)$$

*) Ihre wirkliche Länge ist $s = p \cdot c \cdot \sigma$.

folgt. Lassen wir nun $u_1 \rightarrow 0$ streben, so folgt aus (35) für u die Bedingung $\mathfrak{E}tg u - u = 0$, deren Lösungen $u = \pm 1,197$ wir aus (18) entnehmen. Damit wird $\mathfrak{E} \sin u = 1,51$. Die Gleichung

$$H = \pm 1,51 (\mathfrak{E} + 1)$$

stellt ein Geradenpaar mit den Steigungen $\pm 1,51$ dar, das die ξ -Achse im Punkte $\xi = -1$ kreuzt. Da dem 1. Quadranten des xy -Systems nach dem weiter oben Gesagten der 1. bzw. 3. Quadrant des $\xi\eta$ -Systems entspricht, kommt jedoch nur die eine Gerade

$$H = 1,51 (\mathfrak{E} + 1)$$

als Asymptote in Frage. Die Schnittkoordinate der Asymptote mit der x -Achse ist also ≥ 0 , je nachdem $c \leq 0$, d. h. $\alpha_0 \leq 0^\circ$ ist.

Zur Berechnung der Wellenflächen nach (31) muß die Funktion $e(t)$ bestimmt werden. Da eine schräge Wellenfläche ($c \geq 0$) ihre Eintrittsordinaten nacheinander erreicht, ist es notwendig, eine Bezugswellenfläche zu definieren, von der aus der Lichtweg zu rechnen ist. Wir bestimmen dazu diejenige, welche theoretisch gerade durch den Punkt $x = 0, y = q$ gehen müßte (Abb. 6).*) Bezeichnen wir die Lichtwege der Elemente dieser Fläche bis zu ihrem Eintritt in das Medium mit $\bar{E} = n_0 e(t)$, so werden nunmehr die Wellenflächen durch $E = \bar{E} + E^*$ charakterisiert, wo E^* den Lichtweg vom Eintrittspunkt eines jeden Strahles an bedeutet. Ein Blick auf Abb. 6 lehrt, daß hier (in xy -Einheiten)

$$\bar{E}_{(xy)} = n_0 (y_1 - q) \sin \alpha_0 = c (y_1 - q)$$

ist. Nehmen wir $n_1 = \frac{y_1 - q}{p} = \frac{c}{\sin \alpha_1}$ hinzu und transformieren auf $\xi\eta$ -Einheiten**), so folgt wegen (12) und (33) aus (31)

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{c}{\mathfrak{E} \sin^2 u_1} \int_{u_1}^u \mathfrak{Cof}^2 u \, du + c \mathfrak{E}tg u_1 \\ &= \frac{c}{2 \mathfrak{E} \sin^2 u_1} (\mathfrak{E} \sin u \mathfrak{Cof} u + u) \Big|_{u_1}^u + c \mathfrak{E}tg u_1. \end{aligned} \right.$$

*) Da hier $\alpha_0 > 0$, ist auch $c > 0$, und die Achsen des $\xi\eta$ -Systems sind mit denen des xy -Systems gleichgerichtet.

**) Hierzu müssen wir $E_{(xy)}$ durch pc dividieren.

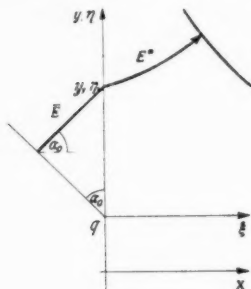


Abb. 6

Wir wollen beweisen, daß alle Wellenflächen die Gerade $\xi = -1$ zur Asymptote haben. Welchen Wert nimmt also die Abszisse an, wenn die Ordinate unendlichen Werten zustrebt? Da die Koordinaten durch (34) mit den u -Parametern und diese untereinander durch (36) verknüpft sind, läuft diese Frage darauf hinaus, welchem Grenzwert der Bruch $\frac{u - u_1}{\sin u_1}$ zustrebt, wenn $u_1 \rightarrow 0$ und außerdem (36) gewahrt bleibt. Zunächst bemerken wir, daß für $u_1 \rightarrow 0$ auch $u \rightarrow 0$ gehen muß, wie die mit $\frac{2}{c} \sin^2 u_1$ multiplizierte Gl. (36) lehrt:

$$\psi(u, u_1) = \frac{2}{c} E \sin^2 u_1 - \sin u_1 \cos u_1 + u_1 - \sin u \cos u - u = 0,$$

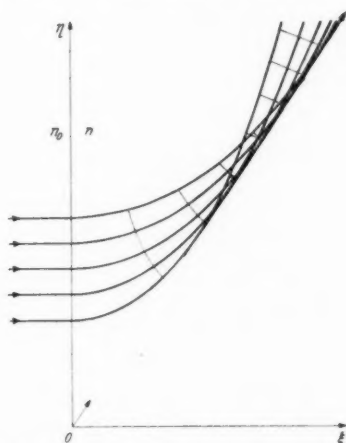


Abb. 7. Strahlen und Wellenflächen von ursprünglich parallelem Licht, das durch eine „schichtsenkrechte“ Grenzebene, auf die es senkrecht auftrifft, in das inhomogene Medium eintritt

worin $\sin u \cos u + u$ nur die eine Nullstelle $u = 0$ hat. Es ist demnach $\xi = \frac{u - u_1}{\sin u_1}$ als unbestimmter Wert zu behandeln. Nach der bekannten Regel erhalten wir:

$$\xi_{u_1 \rightarrow 0} = \lim_{u_1 \rightarrow 0} \frac{u - u_1}{\sin u_1} = \lim_{u_1 \rightarrow 0} \left(-\frac{\Phi_{u_1}}{\Phi_u} - 1 \right) \frac{1}{\cos u_1} = -1.$$

Denn

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} \frac{\Phi_{u_1}}{\Phi_u} = \lim_{u_1 \rightarrow 0} \left(\frac{2}{c} E 2 \sin u_1 \cos u_1 - 2 \sin^2 u_1 \right) \frac{-1}{2 \cos^2 u} = 0.$$

Die Abstände der Wellenflächen sind in der Abb. 5 so gewählt, daß man den Vorgang der Ausbreitung gut erkennt, auch in dem-

jenigen Teil, wo keine *Strahlen* gezeichnet sind. Vom Vorhandensein einer unteren Begrenzung wurde abgesehen.

Wir ergänzen Abb. 5 noch durch den Fall senkrechter Inzidenz (Abb. 7), den Abb. 5 grundsätzlich nicht darstellt. Die Strahlgleichungen lauten, auf p -Einheiten transformiert:

$$\eta = \frac{y-q}{p} = n_1 \cos u, \quad \xi = \frac{x}{p} = n_1 u \quad \text{oder} \quad \eta = n_1 \cos \frac{\xi}{n_1}.$$

Die Krümmung der Strahlen ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{n_1 \cos^2 u}.$$

Die Enveloppe wird zur Geraden $H = 1,51 \Xi$. Die Wellenflächen treten gleichzeitig in das Medium ein, weshalb $e(t) = 0$ ist und bestimmen sich nach (31) folgendermaßen:

$$E = n_1^2 \int_0^u \cos^2 u \, du = n_1^2 (\sin u \cos u - u).$$

b) Helligkeitsverteilung

Im Abschn. 3 wurde eine Formel für die Beleuchtung im Falle eines rotationssymmetrischen Strahlenverlaufes gegeben. Es soll nun eine ganz allgemeine Formel aufgestellt und auf jenen sowie auf den Fall des ebenen Problems angewandt werden. Dabei nehmen wir wieder punkt- bzw. linienförmige Lichtquelle an.

Das räumliche Strahlensystem sei gegeben durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, v, w),$$

worin α Kurvenparameter ist, während v, w Scharparameter sind. Durch Wahl von v, w wird ein *Strahl* herausgegriffen, durch Wahl von α ein *Punkt* auf ihm. Ändern sich die Scharparameter um dv, dw , so erfährt dieser Punkt die kleinen Verrückungen

$$d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_v dv, \quad d\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_w dw.$$

Ein infinitesimales Strahlenbündel mit den Parameterwerten

$$v \dots v + dv, \quad w \dots w + dw$$

schneidet aus der durch den Ort $\mathbf{r}(\alpha, v, w)$ gelegten Orthogonalfläche des Strahlenfeldes ein Element von der Größe

$$(37) \quad df = \mathfrak{S}[d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2] = \mathfrak{S}[\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w] dv dw = F(\alpha, v, w) dv dw$$

aus, worin \mathfrak{S} wieder den Tangenteneinheitsvektor der Strahlen bedeutet. Die von L ausgehenden Strahlen dieses Bündels erfüllen einen gewissen räumlichen Winkel $d\omega$, der von den Scharparametern und ihren Differentialen abhängt:

$$d\omega = \Omega(v, w) dv dw.$$

Er ist gleich der Fläche, die das geradlinig gedachte Strahlenbündel aus der Einheitskugel um L ausschneidet (vgl. S. 610). Damit wird die Beleuchtung, die dem Verhältnis der vom gleichen Lichtstrom senkrecht getroffenen Flächen proportional ist:

$$B = \frac{d\omega}{df} = \frac{\Omega(v, w) dv dw}{\mathfrak{S}[\mathbf{r}, \mathbf{r}_w] dv dw} = \frac{\Omega(v, w)}{F(\alpha, v, w)},$$

worin der Proportionalitätsfaktor = 1 gesetzt ist.

Wir wenden diese Formel zunächst auf rotationssymmetrischen Strahlenverlauf an. Es sei

$$\mathbf{r} = i \cos \psi x(\alpha, t) + j y(\alpha, t) + k \sin \psi x(\alpha, t),$$

wo t, ψ Scharparameter sind. Dementsprechend ist wegen

$$\mathfrak{S} = \mathbf{r}_\alpha \frac{d\alpha}{ds} = \mathbf{r}_\alpha \frac{\cos \alpha}{x_\alpha}$$

$$\mathfrak{S} = i \cos \psi \cos \alpha + j \sin \alpha + k \sin \psi \cos \alpha$$

und

$$\mathfrak{S}_t \mathbf{r}_\psi = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \alpha & \sin \alpha & \sin \psi \cos \alpha \\ \cos \psi x_t & y_t & \sin \psi x_t \\ -\sin \psi x & 0 & \cos \psi x \end{vmatrix} = x(y_t \cos \alpha - x_t \sin \alpha).$$

Man erhält damit für die Beleuchtung den Ausdruck

$$(38) \quad B = \frac{1}{x} \frac{\Omega(t)}{y_t \cos \alpha - x_t \sin \alpha},$$

den wir leicht in den im 3. Abschnitt entwickelten Ausdruck (28) überführen können. Denn setzen wir

$$\frac{d\omega}{d\alpha_1 d\psi} = \frac{d\alpha_1 \cos \alpha_1 d\psi}{d\alpha_1 d\psi}, \quad \text{also} \quad \Omega = \cos \alpha_1,$$

und berücksichtigen, daß

$$y_t \cos \alpha - x_t \sin \alpha = \frac{dy \cos \alpha - dx \sin \alpha}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

ist, wenn dS ein Bogenelement des Wellenflächenmeridians ist, so folgt mit $dS = r_W d\alpha$:

$$B = \frac{\cos \alpha_1}{x} \cdot \frac{d\alpha_1}{dS} = \frac{\cos \alpha_1}{x} \cdot \frac{1}{r_W} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha} \cdot -$$

Wir wollen nun (37) dazu benutzen, die mittlere Krümmung H der Wellenflächen zu berechnen, um damit den in Abschn. 3 gefundenen Wert (25) für die Meridiankrümmung zu prüfen. Wir haben auf S. 612 gefunden, daß

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \mathfrak{S} \nabla \ln f,$$

worin f dem oben mit df bezeichneten Flächenelement gleichkommt. Wegen der Unveränderlichkeit der Scharparameter beim Fortschreiten längs der Strahlen erhalten wir wegen (37) hierfür allgemein

$$\begin{aligned} H &= \mathfrak{S} \nabla \ln F(\alpha, v, w) = \frac{1}{\mathfrak{S} r_v r_w} \frac{\partial}{\partial s} \mathfrak{S} r_v r_w \\ &= \frac{1}{\mathfrak{S} r_v r_w} \left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial s} r_v r_w + \mathfrak{S} \frac{\partial r_v}{\partial s} r_w + \mathfrak{S} r_v \frac{\partial r_w}{\partial s} \right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{S} r_v r_w} \left(\frac{1}{r_L} \mathfrak{S}_a r_v r_w + \mathfrak{S} \mathfrak{S}_v r_w + \mathfrak{S} r_v \mathfrak{S}_w \right), \end{aligned}$$

worin $\frac{1}{r_L} = \frac{d\alpha}{ds}$ die Strahlenkrümmung bedeutet. Für das rotations-symmetrische Feld ist

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{r_L} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln x (y_t \cos \alpha - x_t \sin \alpha) \\ &= \frac{\cos \alpha}{x} + \frac{\cos \alpha}{x_a} \frac{x_t \cos \alpha + y_t \sin \alpha}{x_t \sin \alpha - y_t \cos \alpha} = \frac{1}{r_N} + \frac{1}{r_W}. \end{aligned}$$

Der bei der Ableitung auftretende Ausdruck $y_{ta} \cos \alpha - x_{ta} \sin \alpha$ verschwindet, weil $y_a \cos \alpha - x_a \sin \alpha = 0$. — Der erste Summand der gefundenen Beziehung ist die Normalkrümmung der Wellenflächen in einer zur Meridianebene senkrechten Ebene. Der zweite muß folglich die Meridiankrümmung darstellen und mit (25) identisch sein. Dies ist in der Tat der Fall, wie man leicht bestätigen kann, wenn man

$$x_t = \xi_{u_1}, \quad y_t = \eta_{u_1}, \quad x_a = \xi_u \cos u$$

setzt und die Beziehungen (14) berücksichtigt. Sowohl hier wie in dem Ausdruck für die Beleuchtung verschwindet der Nenner in Punkten der Enveloppe, wie es nach (7a) sein muß.

Ganz analog zu dem eben behandelten Fall lassen sich die Größen B und H für das allgemeine ebene Problem des Abschn. 4

berechnen, wobei wir zunächst die Lichtlinie im Endlichen liegend annehmen.

Das normierende Flächenelement ist unabhängig von den endlichen Werten *beider* Scharparameter, also nur deren Differentialen proportional, wenn wir den Winkel α_0 (vgl. Abb. 4) und die Koordinate z senkrecht zur xy -Ebene als Parameter wählen:

$$d\omega = d\alpha_0 dz, \quad \Omega = 1.$$

Ferner liefert ein dem ebenen Fall entsprechender Ansatz, wie nicht näher ausgeführt sei, für den Bündelquerschnitt (37):

$$\mathfrak{S} \mathbf{r}_{\alpha_0} \mathbf{r}_z = y_{\alpha_0} \cos \alpha - x_{\alpha_0} \sin \alpha,$$

so daß wir für die Beleuchtung erhalten:

$$B = \frac{1}{y_{\alpha_0} \cos \alpha - x_{\alpha_0} \sin \alpha}$$

und für die mit der Meridiankrümmung identische „mittlere“ Krümmung

$$H = \frac{x_{\alpha_0} \cos \alpha + y_{\alpha_0} \sin \alpha}{x_{\alpha_0} \sin \alpha - y_{\alpha_0} \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{x_{\alpha_0}} = \frac{1}{r_W}.$$

Hieraus ist zu folgern, daß die relative Änderung der Beleuchtung (26) beim Fortschreiten längs der Strahlen der Krümmung der Wellenflächenmeridiane entgegengesetzt gleich ist. Die Beleuchtung erreicht folglich auf der Wendepunktskurve

$$x_{\alpha_0} \cos \alpha + y_{\alpha_0} \sin \alpha = 0$$

ein Minimum, um dann zur Enveloppe hin wieder zuzunehmen.

Beschränken wir uns nicht auf eine im *Endlichen* liegende Lichtlinie, so wird die Beleuchtung analog zu (38):

$$B = \frac{\Omega(t)}{y_t \cos \alpha - x_t \sin \alpha}$$

und ebenso

$$H = \frac{x_t \cos \alpha + y_t \sin \alpha}{x_t \sin \alpha - y_t \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{x_{\alpha_0}}.$$

In dieser Gleichung ist das Verhältnis der Krümmungen von Wellenflächenmeridian und Strahl enthalten, nämlich

$$\frac{1}{r_W} : \frac{1}{r_L} = \frac{r_L}{r_W} = \frac{x_t \cos \alpha + y_t \sin \alpha}{x_t \sin \alpha - y_t \cos \alpha}.$$

Wir wollen diese Ergebnisse noch auf unsere Beispiele rechtwinkliger Begrenzung des planparallel geschichteten Mediums und linearer Änderung der Brechungszahl übertragen (Abb. 5, 7).

Als normierendes Flächenelement wählen wir ein Element der ebenen Wellenfläche im Außenmedium:

$$d\omega = d\eta_1 \cos \alpha_0 dz.$$

Für den Fall schräger Inzidenz ist η_1 durch $\eta_1 \sin u_1 = \cos \alpha_0$ mit u_1 verknüpft, so daß

$$\Omega(u_1) = \frac{d\omega}{du_1 dz} = \frac{d \cos \alpha_0}{du_1} \cos \alpha_0 = - \frac{\cos \alpha_0}{\sin^2 u_1},$$

und es folgt mit Hilfe der partiellen Ableitungen von (34)

$$B = \frac{\cos \alpha_0}{R_0 \cos u_1 \operatorname{tg} u},$$

$$\frac{1}{r_W} = \frac{\sin u_1}{\cos u} \left(\frac{1}{\sin u \cos u} - \frac{\operatorname{tg}^2 u}{R_0} \right),$$

worin $R_0 = \cos u - u - (\operatorname{tg} u_1 - u_1)$ gesetzt ist.

Im Falle senkrechter Inzidenz ist $\cos \alpha_0 = 1$, und wir wählen die Eintrittsordinate $\eta_1 = n_1$ als Parameter. Dann erhalten wir (vgl. S. 622):

$$B = \frac{1}{1 - u \operatorname{tg} u},$$

$$\frac{1}{r_W} = \frac{u + \sin u \cos u}{u \sin u - \cos u} \cdot \frac{1}{\eta_1 \cos^2 u}.$$

Herrn Prof. Dr. Picht spreche ich für die Anregung und wertvolle Förderung meiner Arbeit herzlichen Dank aus.

5. Literaturverzeichnis

- 1) M. Born, *Optik*, Berlin 1933.
- 2) A. Sommerfeld u. J. Runge, *Ann. d. Phys.* [4] **35**, S. 277. 1911.
- 3) R. S. Heath, *A Treatise on Geometrical Optics*, Cambridge 1887.
- 4) E. E. Kummer, *Monatsber. d. Kgl. Preuß. Acad. d. Wissensch.* 1860, S. 405.
- 5) R. Straubel, *Handb. d. Phys.* **6**, *Optik*, 1906.
- 6) I. B. Biot, *Mém. de la Classe des Sc. math. et phys. de l'Inst. de France* 1809, S. 258.
- 7) E. Ciani, *Nuovo Cimento* [5] **18**, S. 33. 1909.
- 8) A. Schmidt, *Die Strahlenbrechung auf der Sonne*, Stuttgart 1891.
- 9) M. Wierz, *Diss.* Rostock 1901.
- 10) O. Wiener, *Wied. Ann. d. Phys.* **49**, S. 105. 1893.

- 11) I. A. Grunert, Grunerts Arch. f. Math. u. Phys. **10**. S. 19. 1847.
- 12) L. Matthiessen, Exners Rep. **21**. S. 401. 1888.
- 13) L. Matthiessen, ebenda **25**. 1889.
- 14) L. Matthiessen, Ann. d. Phys. [4] **5**. S. 659. 1901.
- 15) H. Dircks, Diss. Rostock 1900.
- 16) A. Garbasso, Nuovo Cimento [5] **18**. S. 25. 1909.
- 17) A. Garbasso, Ann. d. Phys. **39**. S. 1073. 1912.
- 18) R. Rothe, Math. Abhandl., Hermann Amandus Schwarz gewidmet, Berlin 1914.
- 19) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, Berlin 1933.
- 20) W. Hillers, Abhandl. aus dem Gebiet der Naturw. **20**. S. 2, Hamburg 1914.
- 21) J. Parnell, Philos. Mag. [4] **37**. S. 400. 1869 (zitiert nach Garbasso).
- 22) J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, Stuttgart 1926.

Berlin-Frohnau, Pfadfinderweg 19.

(Eingegangen 30. April 1940)

Ramaneffektuntersuchungen an Alaunkristallen¹⁾**Von G. Leibfried**

In den Linienspektren der Chromalaune treten Begleitlinien auf, die als Kombinationen des Elektronensprungs mit Gittereigenfrequenzen gedeutet werden²⁾. Die ultrarotaktiven Eigenschwingungen dieser Gitter sind von K. H. Hellwege³⁾ aufgenommen worden. In der vorliegenden Arbeit soll die Kenntnis der Gitterschwingungen durch Feststellung der ramanaktiven Eigenschwingungen vervollständigt werden.

Große Kalium-Aluminium-Alaunkristalle wurden aus der Lösung gezogen. Sie waren vollkommen klar und wurden an der Oberfläche noch mit destilliertem Wasser auf einer Glasscheibe poliert.

Da wegen der kleinen Frequenz der Gitterschwingungen mit Ramanlinien in nächster Nähe der Primärlinie zu rechnen war, wurde nach dem Vorgang von Rasetti⁴⁾ die Umgebung der Primärlinie durch ein selektives Filter vor Überstrahlung durch die Primärlinie geschützt. Nachdem anfängliche Versuche mit einer Thalliumlampe und einem Filter aus heißem Thalliumdampf nicht zum Ziel führten, wurde wieder die Hg-Linie 2537 und ein Filter aus Hg-Dampf benutzt. Es wurde in üblicher Weise die Lichtquelle, eine Heraeus'sche Quarzlampe, auf den Kristall abgebildet und das Streulicht rechtwinklig zur Einstrahlungsrichtung beobachtet, wobei der Kristall wieder auf den Spalt des Spektrographen abgebildet wurde. Um eine intensive, selbstumkehrfreie Ausstrahlung zu erhalten, wurde der Lichtbogen der Lampe mittels eines Magneten an die Wand gedrückt und diese Stelle mit Preßluft gekühlt. Die Intensität wurde dadurch um ein Vielfaches gesteigert, die Lebensdauer der Lampe, die allmählich undurchlässig wurde, allerdings auf etwa 250 Std. verkürzt. Vor dem Spektrographenspalt befand sich das Filter in Gestalt eines mit etwas Quecksilber gefüllten zylindrischen Gefäßes aus Quarzglas, das in einem Ofen auf 160° gehalten wurde. Die Länge des Gefäßes betrug 15 cm, der Durch-

1) D 7, 1. Teil.

2) H. Boehm, Ann. d. Phys. [5] **32**, S. 521. 1937.

3) K. H. Hellwege, Ann. d. Phys. [5] **34**, S. 521. 1939.

4) F. Rasetti, Nature **127**, S. 626. 1931.

messer 3 cm. Bei dieser Temperatur wurde die Primärlinie vollkommen weggenommen, allerdings auch die nächste Umgebung etwas geschwächt.

Wegen der erforderlichen großen Dispersion mußte ein Zeiss-spektrograph Q 24 trotz der für Ramanaufnahmen kleinen Lichtstärke 1:11 verwandt werden. Die Belichtungszeiten betrugen daher bis zu 20 Std. Die Aufnahmen wurden mit einem Zeissregistrier-photometer photometriert und die Kurven mit einem Zeiss'schen Zweikoordinatenmeßapparat ausgemessen. Zur Aufstellung der Dispersionskurven dienten die Hg-Linien der Primärlichtquelle.

Die gefundenen Ramanfrequenzen sind in Tab. 1 niedergelegt. Zu ihr ist folgendes zu bemerken: Ohne Filter hat H. Nisi¹⁾ die größeren Ramanfrequenzen bereits gemessen. Seine Zahlen sind zum Vergleich in der 2. Spalte wiedergegeben. Für die niederfrequenten Schwingungen geben die Stokes'schen Linien die besseren Werte, da auf der kurzwelligen Seite die Maxima durch Überlagerung eines Kontinuums etwas verschoben sind. Die Meßgenauigkeit beträgt $\pm 3 \text{ cm}^{-1}$, bei den breiten Wasserbanden nur etwa $\pm 10 \text{ cm}^{-1}$.

Tabelle 1

Abstand der Ramanlinien von der Erregerlinie in Wellenzahlen (cm^{-1})	Ergebnisse von Nisi	Ent- sprechende Wellen- längen in μ	Art der Linie	Bemerkungen
617 ²⁾	618,3	16,1	s b	SO ₄ } anti-Stokes- sche Linien
459	454,8	21,7	s b	
184	189,0	54,2	s b	
159		63	s b	
115		87	s b	
77		130	s b	
79		126	m b	
121		82,5	m b	Stokes'sche Linien
155		66,5	m b	
190	189,0	52,5	m b	
322	322,8	31	s b	
454	454,8	22	m b	
974	969,3	10,3	m	
990	987,3	10,1	st	SO ₄ }
1095	1095,6	9,1	s	
1128	1126,0	8,85	m	Wasserbande
3392	3384	2,95	st sb	
3550		2,82	s b	

(s schwach, m mittelstark, st stark, b breit, sb sehr breit)

1) H. Nisi, Jap. Journ. of Physics 7. S. 6. 1931.

2) Die entsprechende Stokes'sche Linie ist durch eine Hg-Linie verdeckt.

Die Deutung der Ramanfrequenzen über 400 cm^{-1} fällt nicht schwer: Die Frequenzen des freien SO_4 -Ions sind nämlich 451, 613, 981 und 1106 cm^{-1} . Die beobachteten Frequenzen zwischen 400 und 1100 cm^{-1} kommen also alle dem SO_4 -Ion zu. Merkwürdig ist nur die Aufspaltung der Schwingung 981 cm^{-1} , da diese der totalsymmetrischen Pulsation zugeordnet wird, also nicht entartet sein kann. Man wird nicht fehlgehen, wenn man annimmt, daß die an verschiedenen Plätzen sitzenden SO_4 -Ionen nicht im gleichen Maß von den Gitterkräften beeinflusst werden. Das Ziel dieser Arbeit war aber gerade die Feststellung der niederfrequenten Ramanlinien. Die im Gebiet $< 400\text{ cm}^{-1}$ gefundenen Linien kommen Gitterschwingungen zu. Von ihnen ist 320 cm^{-1} im Ultrarotspektrum eben angedeutet. Die starke Ultrarotlinie bei $37,6\text{ }\mu$, die 266 cm^{-1} entspricht, fehlt im Ramanspektrum ganz. Vergleicht man die so gefundenen Ramanlinien mit den Frequenzdifferenzen zwischen Haupt- und Nebenlinien im roten Absorptionsspektrum der Chromalaune, die ins Gebiet $50\text{--}500\text{ cm}^{-1}$ fallen, so stimmt der Frequenzbereich tatsächlich überein. Ein quantitativer Vergleich läßt sich aber schon deshalb nicht durchführen, weil zu Raman-aufnahmen die durchsichtigen Aluminiumalaune, für die Kombinationslinien aber die gefärbten Chromalaune benützt werden müssen. Die bisher hypothetische Deutung der Begleitlinien der Chromalaune wird aber insofern jetzt auf sichereren Boden gestellt, als nachgewiesen ist, daß in diesem Frequenzbereich tatsächlich Gitterschwingungen liegen.

Göttingen, II. Physikal. Institut, April 1940, z. Zt. im Felde.

(Eingegangen 16. April 1940)

Notiz
über die Ramanlinien von Rohrzuckerkristallen¹⁾

Von G. Leibfried

In Fortsetzung der vorhergehenden Arbeit sollten an einem durch van der Waalssche Kräfte gebundenen Gitter die Ramanlinien aufgesucht werden, welche Gitterschwingungen entsprechen. Als geeignete Objekte erwiesen sich Kristalle aus Zucker, die von der Firma Pfeiffer und Langen, Elsdorf, in großen Stücken zur Verfügung gestellt wurden. Sie wurden oberflächlich mit Methanol und Diamantine poliert. Im übrigen war die Versuchsanordnung dieselbe wie in der vorhergehenden Arbeit. Unter der Einwirkung der Strahlung der Hg-Lampe bildete sich nach einiger Zeit auf den Kristallen ein fürs UV undurchlässiger Überzug, so daß während einer Aufnahme mehrfach die Kristalle ausgewechselt werden mußten.

Im Gegensatz zu den Alaunen konnten hier keine Ramanlinien gefunden werden, die Gitterschwingungen zukommen. Es ist aber zu bemerken, daß bei dieser Anordnung Linien, die näher als etwa 30 cm^{-1} an der Hauptlinie liegen, nicht mehr festgestellt werden konnten. Eine Verbesserung der Apparatur in dieser Hinsicht konnte aus äußeren Gründen nicht mehr durchgeführt werden. Die beobachteten Ramanfrequenzen decken sich mit denen der Zuckermolekel, wie sie Polara²⁾ an Zuckerlösungen fand, abgesehen von kleinen Verschiebungen und Aufspaltungen. Sie weichen auch wenig von den schon früher an Glycerin³⁾ gefundenen Frequenzen ab, wie folgende Tabelle zeigt:

Fester Zucker.	—	—	—	835	920/60	1040	1145/75	1250	1370
Zuckerlösung .	—	645	689	858	945	1037	1134	1224	1339
Glycerin . . .	480	—	690	850	925	1080	—	—	—

Fester Zucker.	1470	—	—	—	—	—	—	—	2930
Zuckerlösung .	1456	1683	2016	2055	2113	2164	2404	2718	2873
Glycerin . . .	1450	—	—	—	—	—	—	—	2900

1) D 7, 2. Teil.

2) V. Polara, Atti. d. R. Acc. Naz. dei Lincei (6) **14**. S. 293. 1931.

3) Cl. Schaefer u. F. Matossi, Fortschritte d. Chem. **20**. S. 353. 1930.

Das Fehlen der Linien 1683—2718, die in Zuckerlösung festgestellt wurden, dürfte auf ihre geringe Intensität zurückzuführen sein. Eine Zuordnung der Linien zu den einzelnen Schwingungen der Zuckermolekel gab Polara¹⁾.

Diese und die vorhergehende Arbeit wurden in der Zeit von September 1938 bis Juli 1939 im II. Physikalischen Institut der Universität Göttingen durchgeführt. Herrn Prof. Dr. Joos sage ich für Anregung und stete Förderung wärmsten Dank.

1) V. Polara, *Atti. d. R. Acc. Naz. dei Lincei* (6) **14**. S. 293. 1931.

Göttingen, II. Physikal. Institut, April 1940, z. Zt. im Felde.

(Eingegangen 16. April 1940)

ANNALEN
DER
PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 420. Band

Kuratorium:

W. Gerlach F. Paschen M. Planck
R. W. Pohl A. Sommerfeld

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin

Mit 50 Abbildungen im Text



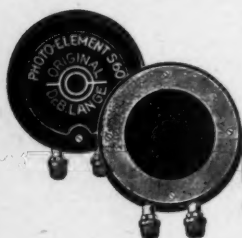
LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Redaktionsschluß am 30. Januar 1940

Inhalt

	Seite
Walter Masing-Leipzig, Eine kombinierte Verstärkerapparatur zum Nachweis kleinster Ionenmengen, insbesondere einzelner β -Teilchen. (Mit 10 Abbildungen)	557
P. Vetterlein-Hannover, Die Messung von Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen. (Mit 15 Abbildungen)	583
E. v. Heydebrand und der Lasa-Berlin-Frohnau, Optische Untersuchungen in einem speziellen inhomogenen Medium. (Mit 7 Abbildungen)	589
G. Leibfried-Göttingen, Ramaneffektuntersuchungen an Alaunkristallen	628
G. Leibfried-Göttingen, Notiz über die Ramanlinien von Rohrzuckerkristallen	631

Selen-Photoelemente



Lieferbar in verschiedenen Größen
von 12—145 mm Durchmesser

Ausführliche Druckschriften stehen zur Verfügung

Spezialfabrik lichtelektrischer Zellen
und Apparate

DR. B. LANGE

BERLIN-ZEHLENDORF-W., HERMANNSTR. 14-18

Fernruf: 850888 · Telegrammadresse: Photozelle Berlin

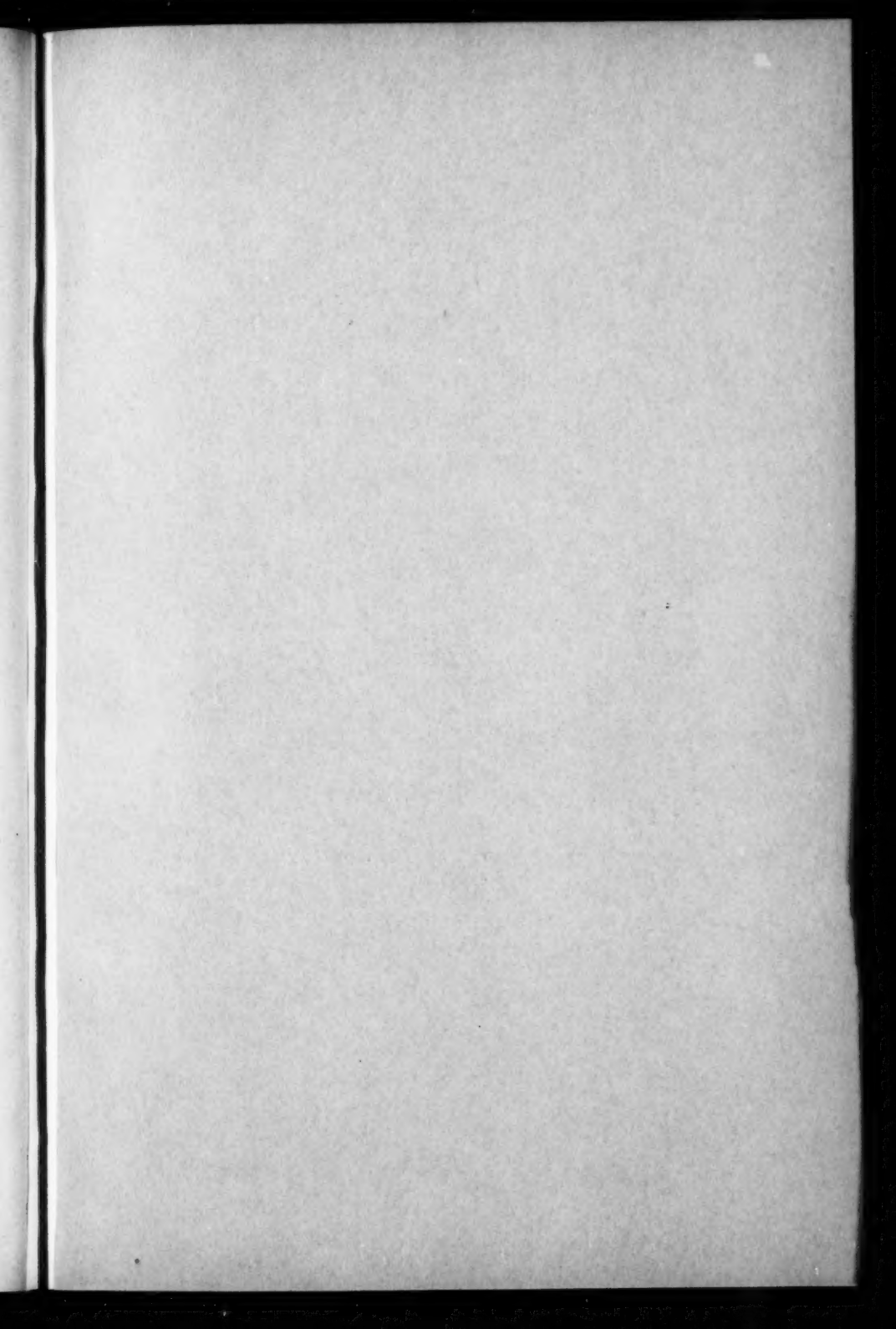


Lehrbuch der Metallkunde

Chemie und Physik der Metalle und ihrer Legierungen.
Von GUSTAV TAMMANN. 4., erweiterte Aufl. XV, 536 Seiten
mit 385 Abbildungen. 1932. gr. 8°. RM. 48.—, geb. RM. 49.50

Zeitschrift für Metallkunde: Fußend auf seinen eigenen klassischen, fast alle Gebiete der Metallforschung behandelnden Arbeiten, berücksichtigt Tammann überall auch die Ergebnisse fremder Forschung und gibt damit dem Leser ein klares Bild über den heutigen Stand der modernen Metallkunde. In vorliegendem Buche werden in engem Rahmen, dabei jedoch umfassend jene theoretischen Grundlagen dargestellt, die jeder Metallograph bei seinen Arbeiten benötigt. Es erschien notwendig, Hinweise zu geben, inwieweit die bei den metallischen Werkstoffen tatsächlich vorliegenden Verhältnisse von den durch die theoretischen Gleichgewichtsschaubilder beschriebenen Zuständen abweichen können und welche praktischen Folgerungen sich daraus ergeben. Einige Angaben über das praktische metallographische Arbeiten und über neuere Arbeitsmethoden sind aufgenommen. Die Darstellungsweise gestattet es auch dem weniger Erfahrenen, sich leicht in den Stoff einzuarbeiten

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG



Namenregister zum Jahrgang 1940

5. Folge, Band 37—38

A

- Ackermann, Friedrich-Wilhelm, Ultrarote Absorptionsspektren von AgCl-Kristallen mit Zusatz fremder Komplexe 37, 442.
 Akpinar, Sait, Über den Einbau chemisch definierter Zusätze in Alkalihalogenidkristallen 37, 429.
 Auer, H. u. Schröder, H., Das Rückbildungsverfahren zur Untersuchung von Zustandsänderungen in Metallen 37, 137.

B

- Bartholomeyczzyk, W. u. Wolter, E., Über den Mechanismus der Zündung langer Entladungsröhre. II. Beeinflussung der Zündung durch Vorionisation 37, 124.
 Bauer, Karl, Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. XV. Elektrische Messungen am Bleiselenid 38, 84.
 Bechert, Karl, Zur Theorie ebener Störungen in reibungsfreien Gasen 37, 89. — Zur Theorie ebener Störungen in reibungsfreien Gasen. II 38, 1.
 Becker, H. E. R., Zur Frage der Oberflächenviskosität von Flüssigkeiten 37, 403.
 Becker, R. u. Polley, H., Der Einfluß innerer Spannungen auf das Einmündungsgesetz bei Nickel 37, 534.
 Bender, Dietrich, Ultraschallgeschwindigkeiten in Stickstoff, Stickoxyd und Kohlenoxyd zwischen 20 und 200° C, gemessen mit einem neuen Verfahren 38, 199.
 Boettcher, A., Bestimmung des Brechungsquotienten von Eisen mit der Kundschen Prismenmethode 37, 278.
 Bopp, Fritz, Eine lineare Theorie des Elektrons 38, 345. — Energetische Betrachtungen zum Schallstrahlungsdruck 38, 495.

- Brode, H., Bestimmung der Atomabstände und Molekülstrukturen der In- und Ga-Halogenide mittels Elektronenbeugung 37, 344.
 Buchholz, Herbert, Die Bewegung elektromagnetischer Wellen in einem kegelförmigen Horn 37, 173.
 Buchwald, Eberhard, Metrik kristalloptischer Interferenzfarben. I. 38, 245. — II. 38, 325.

E

- Eisenmann, Luitgard, Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. XVI. Elektrische Messungen am Bleisulfid 38, 121.
 Epheser, Helmut, Eine moderne Darstellung der Gullstrand'schen Arbeiten zur Strahlenoptik 38, 501.
 Erfling, H.-D., Änderung der thermischen Ausdehnung und des elektrischen Widerstandes von γ -Mangan beim Übergang zur α -Phase 37, 162.
 Erfling, H.-D. vgl. Grüneisen, E. 38, 399.

F

- Fetz, H., Über die Beeinflussung eines Quecksilbervakuumbogens mit einem Steuergitter im Plasma 37, 1.
 Fischer, V., Die Kondensation von Dampfgemischen aus beliebig vielen Bestandteilen 37, 63. — Zustandsgleichung der Gemische 38, 26.
 Fritsch, H., Über die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von Neodymsalzen und die daraus folgenden Termerspaltungen 38, 555.
 Fuchs, J., Über einen Formalismus zur Definition des atomaren Strahlungsvorganges 38, 315.

G

- Goens, E., Über die Temperaturabhängigkeit der Hauptelastizitätskonstanten des Einkristalls von Kupfer, Gold, Blei, Aluminium bei tiefen Temperaturen 38, 456.

- Goos, Fritz, Lichtelektrische Eigenschaften zerstörter Zinksulfidkupferphosphore 37, 76.
 Grübling, R., Über die Lebensdauer freier Elektronen im nachleuchtenden Quecksilberdampf 37, 453.
 Grüneisen, E. u. Erfling, H.-D., Elektrischer und thermischer Widerstand von Berylliumkristallen im transversalen Magnetfeld 38, 399.

II

- Häsing, J., Die lichtelektrischen Eigenschaften der Lösungen von Natrium in flüssigem Ammoniak 37, 509.
 Hartmann, H. vgl. Sommerfeld, A. 37, 333.
 Hauser, Georg, Über Messungen an einer Resonanzanlage zur Erzeugung höchster Wechselspannungen 37, 249.
 Heffels, J., Absorptionsmessungen an kolloidalen Lösungen und Elektrolyten im Wellenbereich von 10,5 bis 20 m 37, 477.
 Hellwege, A., geb. Roever, Elektronensprung-Schwingungskombinationen in den Spektren der Praseodymsalze 37, 226.
 Herrmann, Ernst, Versuche zur elektrolytischen Abscheidung von weichem γ -Mangan 37, 155.
 v. Heydebrand und der Lasa, E., Optische Untersuchungen in einem speziellen inhomogenen Medium 37, 589.
 Hoch, Alois, Die Absorptionsspektren einiger Zinksulfidphosphore im angeregten Zustand 38, 486.
 Honerjäger, Richard, Untersuchungen über die azimutale Intensitätsverteilung der Röntgenbremsstrahlung 38, 33.
 Hüttel, A., Eine Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit unter Anwendung des Kerreffektes und einer Photozelle als phasenabhängigen Gleichrichter 37, 365.

K

- Kofink, W., Zur Diracschen Theorie des Elektrons. I. Algebraische Identitäten zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten 38, 421. — II. Algebraische Identitäten in der Diracschen Theorie des Elektrons, die Differentialquotienten enthalten 38, 436. — III. Folgen der Realität der elektro-

- magnetischen Potentiale 38, 565. — IV. Beziehungen zwischen den Realitätsrelationen 38, 583.
 Kohler, Max, Untersuchungen zur T-Abhängigkeit des el. Widerstandes und zur Frage nach der Gültigkeit der Matthiessenschen Regel. Eine neue Art der Änderung des el. Widerstandes eines isotropen Elektronengases im transversalen Magnetfeld 38, 283. — Thermischer Kontaktwiderstand von Metallen und der dadurch verursachte Temperatursprung im Kontakt. Neuartige Thermokräfte im einmetallischen Kreis und ihr Zusammenhang mit dem Benedickseffekt 38, 542.
 Kretzmann, R., Über optische Konstanten dicker Metallschichten im Sichtbaren und nahen Ultrarot 37, 303.

L

- v. Laue, M., Einordnung der Kossel-Möllensstedtschen Elektroneninterferenzen in die Raungittertheorie 37, 169.
 Leibfried, G., Ramaneffektuntersuchungen an Alaunkristallen 37, 628. — Notiz über die Ramanlinien von Rohrzuckerkristallen 37, 631.
 Littmann, H., Die Reflexion an absorbierenden Medien 38, 139.

M

- Martin, G., Untersuchungen über die Temperaturabhängigkeit der optischen Konstanten einiger Metalle 38, 615.
 Masing, Walter, Eine kombinierte Verstärkerapparatur zum Nachweis kleinster Ionenmengen, insbesondere einzelner β -Teilchen 37, 557.
 Meixner, J., Bemerkung zur Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes 38, 609.
 Meyer, H., Umladungen von He-Kanalstrahlen in Gasen 37, 69.
 Molière, G., Zur Strahlungstheorie. I. Wellengleichung erster Ordnung für die Potentiale des Strahlungsfeldes 37, 415.
 Mrass, H., Zur Frage der Wirkungsgradbestimmung von Resonanztelefonen 37, 291.
 Mussmann, H. u. Schlechtweg, H., Drehmoment kubischer Rekristallisationstexturen im Magnetfeld 38, 215.